

> découpage qui touchent l'élément en question en indiquant les regroupements. On sépare les trois nombres associés aux sommets des trois nombres associés aux côtés par un trait vertical. Si deux découpages sont identiques au sens topologique, alors ils auront les mêmes deux paquets de trois nombres (à l'ordre près des éléments dans chaque paquet). Pour le découpage B5, par exemple, on a $[0, 0, 0 \mid 2, 2, 2]$.

Pour les découpages (A), de type $\{ \}$, on a ainsi:

B5 $[0, 0, 0 \mid 2, 2, 2]$, B12 $[1, 0, 0 \mid 2, 1+2, 0]$, B13 $[1, 0, 0 \mid 1+1, 3, 0]$, B15 $[3, 0, 0 \mid 0, 1+1+1, 0]$, B20 $[2, 0, 0 \mid 0, 1+2, 1]$, B22 $[1, 0, 0 \mid 1, 3, 1]$.

Les crochets sont tous différents. On en déduit qu'il ne peut pas y avoir d'égalité entre les découpages de type $\{ \}$.

Les découpages (B), de type $\{1+1/2\}$, donnent:

B6 $[2, 0, 0 \mid 0, 2+1, 0]$, B7 $[1, 0, 0 \mid 2, 2, 0]$, B10 $[2, 0, 0 \mid 0, 2, 1]$, B17 $[1, 1, 0 \mid 1, 1, 0]$, B19 $[2, 1, 0 \mid 0, 1+1, 0]$, B21 $[1, 1, 0 \mid 0, 2, 1]$.

Les découpages (C), du type $\{1+1/2, 1+1/2\}$: B8 $[1, 1, 0 \mid 0, 2, 0]$, B9 $[2, 1, 0 \mid 0, 0, 1]$, B11 $[2, 1, 0 \mid 0, 1, 0]$, B18 $[1, 1, 1 \mid 0, 1, 0]$. Les découpages B9 et B11 ayant les mêmes deux paquets de trois nombres, il faut les examiner plus attentivement. Ils diffèrent topologiquement, car les deux points intérieurs du découpage B9 sont sur un même segment, alors qu'ils sont sur deux segments différents dans le découpage B11.

Pour les découpages (D), de type $\{2+1/2\}$:

B14 $[1, 1, 0 \mid 0, 1+1, 0]$, B16 $[1, 1, 0 \mid 0, 1, 1]$,

B23 $[1, 1, 0 \mid 1, 1, 0]$. Les découpages B16 et B23 sont bien différents: pour B16, jamais plus de deux extrémités des segments de découpage ne joignent un même côté du grand triangle, alors que pour B23, trois des extrémités de ces segments joignent le côté droit du triangle.

Ainsi, les dessins B1 à B23 de l'encadré 1 sont tous différents.

Que se passe-t-il pour les découpages en davantage de triangles? Aujourd'hui, on connaît 8 découpages premiers d'un triangle en 5 triangles, et 62 découpages premiers en 6 triangles. Mais on n'est certain ni que les listes connues soient complètes, ni qu'elles ne contiennent pas de découpages équivalents (voir www.mathpuzzle.com/triangle.html).

Un calcul de ces suites a été mené par Miroslav Vicher et a conduit au tableau suivant, qui attend confirmation (voir www.vicher.cz/puzzle/triangles/triangles.htm).

Nombre de triangles	Nombre de découpages	Nombre de découpages premiers
2	1	1
3	4	1
4	23	3
5	180	8
6	1806	62
7	20 198	535
8	227 120	4 213

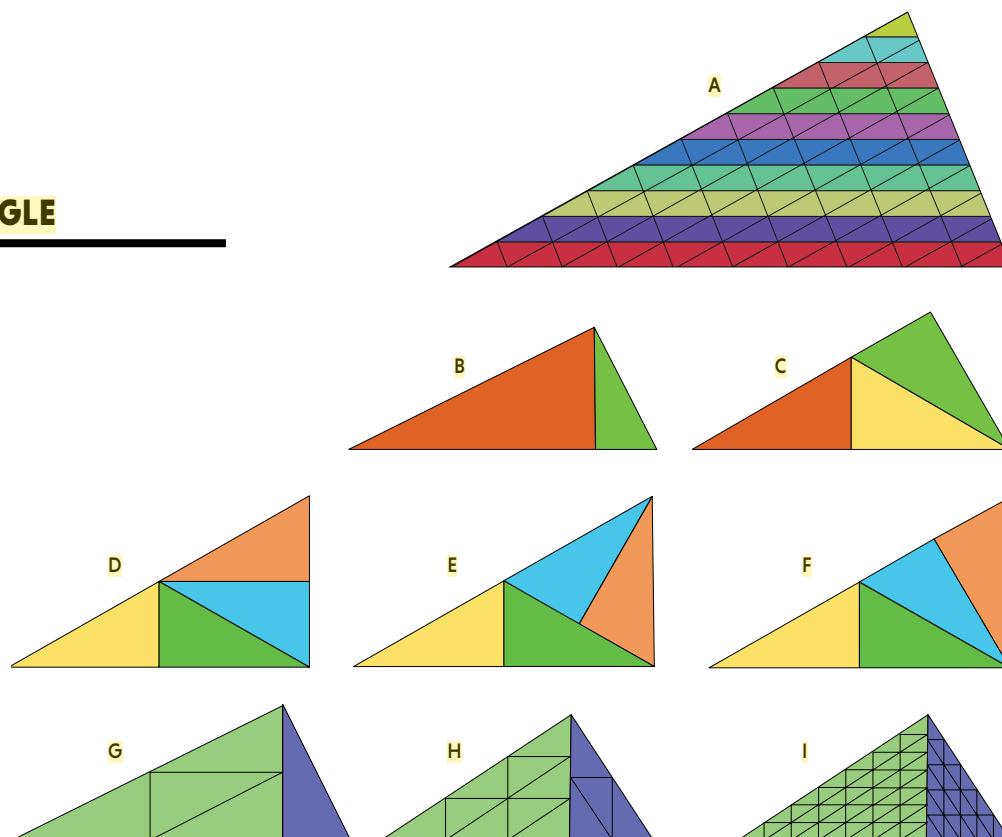
2

PAVER UN TRIANGLE

Tout triangle peut être pavé par n^2 triangles semblables à lui-même et égaux (A).

Le triangle rectangle d'angles 30° , 60° et 90° se découpe en deux triangles semblables à lui-même mais de tailles différentes (B), en trois triangles semblables à lui-même et de même taille (C), et en quatre triangles semblables à lui-même et de même taille (D, E, F).

Un triangle rectangle T de côtés n et m peut être pavé par $n^2 + m^2$ triangles semblables à lui-même. Le triangle G correspond à $5 = 1^2 + 2^2$, le triangle H à $13 = 3^2 + 2^2$ et le triangle I à $74 = 5^2 + 7^2$.



Un autre problème de découpage fait l'objet de questions imparfaitement résolues, malgré de récents progrès dus au mathématicien et logicien américain Michael Beeson qui, depuis une dizaine d'années, s'est passionné pour le sujet, redécouvrant parfois sans le savoir certains des résultats établis par d'autres mathématiciens, dont le Hongrois Miklós Laczkovich.

DÉCOUPAGE EN TRIANGLES SEMBLABLES

Michael Beeson a concentré son énergie sur le découpage de triangles en triangles semblables plus petits: ce sont des pavages d'un triangle par des triangles.

Le résultat le plus élémentaire sur ces questions s'appuie sur le pavage d'un triangle par un triangle n fois plus petit: chaque côté est n fois plus petit que le côté correspondant du triangle de départ. On découpe chaque côté en n segments de même longueur, et l'on trace à partir de ces points tous les segments de droites parallèles aux côtés qui s'en déduisent (voir la figure A de l'encadré 2).

L'observation de la figure est amusante, car elle permet de démontrer visuellement la formule $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$: la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 . On raisonne sur la figure en cinq étapes:

- Les triangles situés à un même niveau (de la même couleur sur notre dessin) sont au nombre de 1, puis 3, puis 5, puis 7, etc.: à chaque étape, il s'en ajoute deux.
- Le nombre total de petits triangles est donc $1+3+5+\dots+(2n-1)$.
- L'aire de chaque petit triangle est n^2 fois inférieure à l'aire du triangle de départ, car l'aire varie comme le carré de la longueur et que les côtés des petits triangles sont exactement n fois inférieurs à ceux du grand.
- Puisqu'ils recouvrent exactement la surface du triangle de départ, leur nombre est n^2 .
- Conclusion: $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$.

Ce que nous retiendrons ici est que tout triangle T peut être pavé par n^2 petits triangles identiques et semblables à lui-même, et cela quel que soit l'entier n . Autrement dit, un découpage d'un triangle en n^2 triangles de même taille et semblables à lui-même est possible pour tout triangle T et pour tout entier n .

La question générale qui vient à l'esprit est alors: pour quels entiers m existe-t-il des triangles T pavables par m triangles semblables?

Trois variantes du problème sont possibles, selon qu'on exige ou non que les pavés aient la même taille, et qu'ils soient semblables au triangle de départ:

Problème A. Pour quels entiers m existe-t-il un triangle T pavable par m triangles semblables à T ?

3

PAVER UN TRIANGLE PAR DES TRIANGLES IDENTIQUES

La recherche des pavages d'un triangle par m triangles identiques conduit à d'étranges découvertes, comme ces pavages par $m = 6, 28, 44$ et 153 triangles. Certaines valeurs de m sont impossibles, comme 7 et 11 (c'est démontré). Pour $m = 14$, le problème est non résolu: on ignore à ce jour s'il existe un triangle pavable par 14 triangles identiques.

Les entiers m pour lesquels il existe un pavage du triangle équilatéral par m triangles identiques sont mal connus. Michael Beeson a démontré qu'aucun nombre premier supérieur à 3 ne convenait pour m . Il a aussi trouvé ce pavage extraordinaire du triangle équilatéral par $m = 10\,935$ triangles identiques de côtés 3, 5 et 7.

