

Un autre problème de découpage fait l'objet de questions imparfaitement résolues, malgré de récents progrès dus au mathématicien et logicien américain Michael Beeson qui, depuis une dizaine d'années, s'est passionné pour le sujet, redécouvrant parfois sans le savoir certains des résultats établis par d'autres mathématiciens, dont le Hongrois Miklós Laczkovich.

DÉCOUPAGE EN TRIANGLES SEMBLABLES

Michael Beeson a concentré son énergie sur le découpage de triangles en triangles semblables plus petits: ce sont des pavages d'un triangle par des triangles.

Le résultat le plus élémentaire sur ces questions s'appuie sur le pavage d'un triangle par un triangle n fois plus petit: chaque côté est n fois plus petit que le côté correspondant du triangle de départ. On découpe chaque côté en n segments de même longueur, et l'on trace à partir de ces points tous les segments de droites parallèles aux côtés qui s'en déduisent (voir la figure A de l'encadré 2).

L'observation de la figure est amusante, car elle permet de démontrer visuellement la formule $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$: la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 . On raisonne sur la figure en cinq étapes:

- Les triangles situés à un même niveau (de la même couleur sur notre dessin) sont au nombre de 1, puis 3, puis 5, puis 7, etc.: à chaque étape, il s'en ajoute deux.
- Le nombre total de petits triangles est donc $1+3+5+\dots+(2n-1)$.
- L'aire de chaque petit triangle est n^2 fois inférieure à l'aire du triangle de départ, car l'aire varie comme le carré de la longueur et que les côtés des petits triangles sont exactement n fois inférieurs à ceux du grand.
- Puisqu'ils recouvrent exactement la surface du triangle de départ, leur nombre est n^2 .
- Conclusion: $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$.

Ce que nous retiendrons ici est que tout triangle T peut être pavé par n^2 petits triangles identiques et semblables à lui-même, et cela quel que soit l'entier n . Autrement dit, un découpage d'un triangle en n^2 triangles de même taille et semblables à lui-même est possible pour tout triangle T et pour tout entier n .

La question générale qui vient à l'esprit est alors: pour quels entiers m existe-t-il des triangles T pavables par m triangles semblables?

Trois variantes du problème sont possibles, selon qu'on exige ou non que les pavés aient la même taille, et qu'ils soient semblables au triangle de départ:

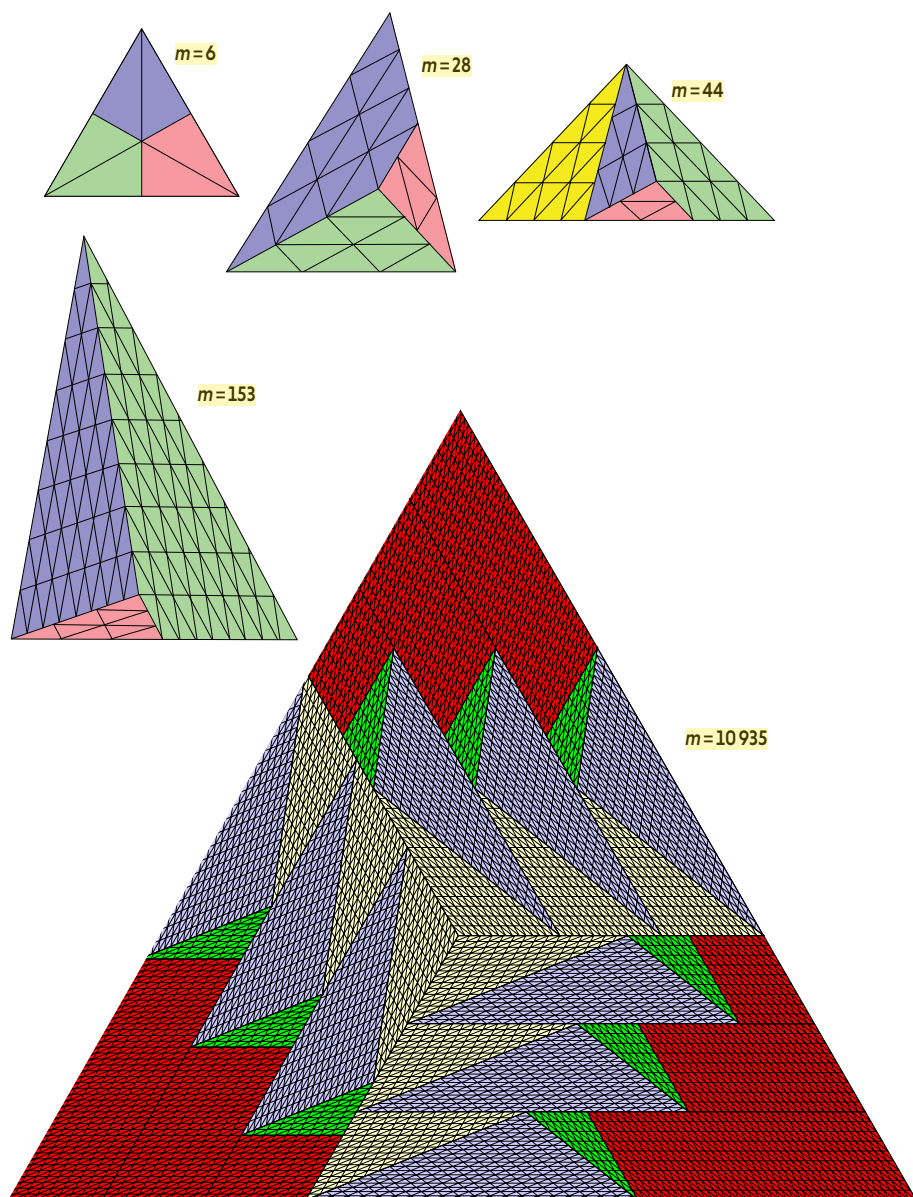
Problème A. Pour quels entiers m existe-t-il un triangle T pavable par m triangles semblables à T ?

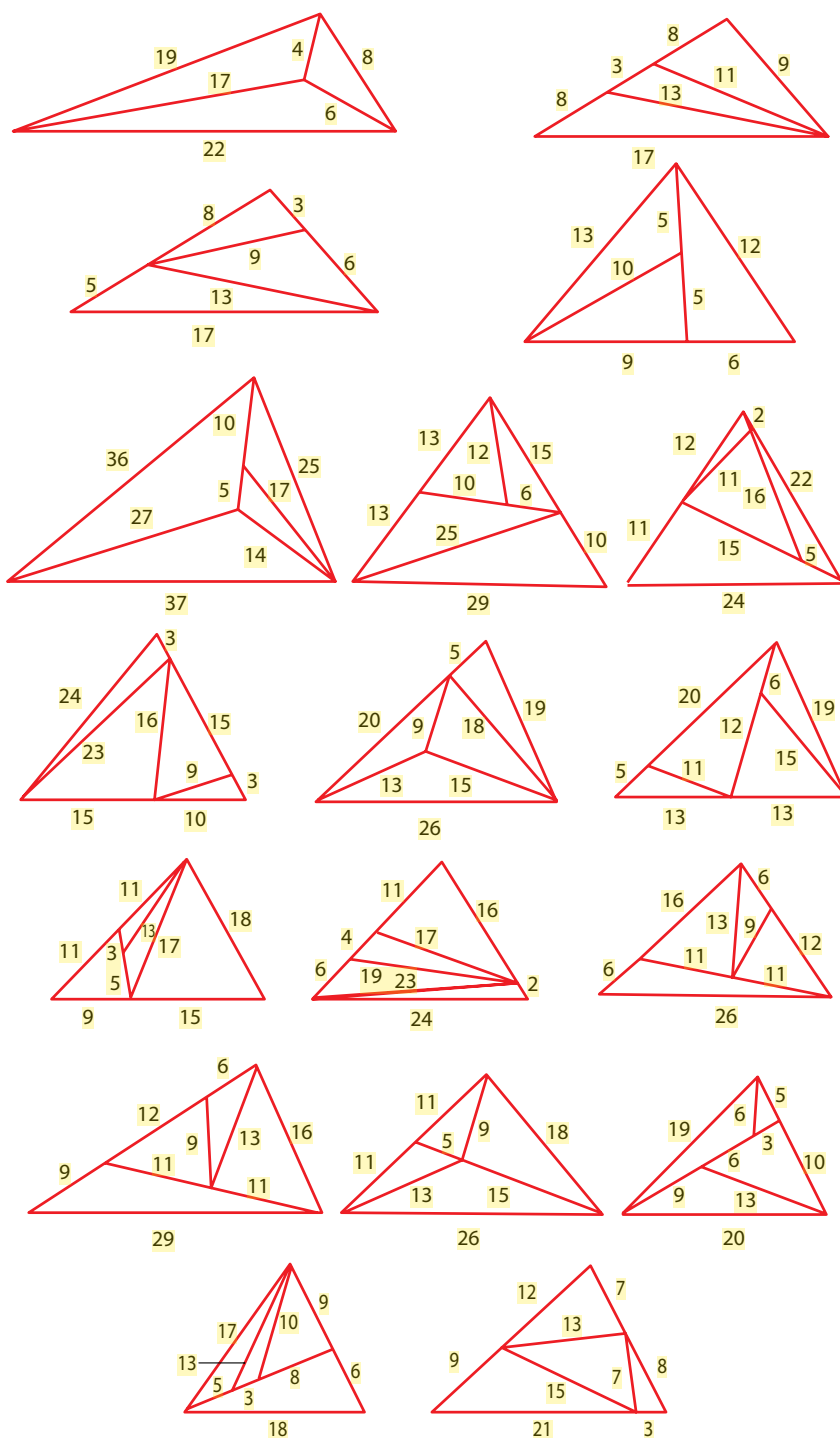
3

PAVER UN TRIANGLE PAR DES TRIANGLES IDENTIQUES

La recherche des pavages d'un triangle par m triangles identiques conduit à d'étranges découvertes, comme ces pavages par $m = 6, 28, 44$ et 153 triangles. Certaines valeurs de m sont impossibles, comme 7 et 11 (c'est démontré). Pour $m = 14$, le problème est non résolu: on ignore à ce jour s'il existe un triangle pavable par 14 triangles identiques.

Les entiers m pour lesquels il existe un pavage du triangle équilatéral par m triangles identiques sont mal connus. Michael Beeson a démontré qu'aucun nombre premier supérieur à 3 ne convenait pour m . Il a aussi trouvé ce pavage extraordinaire du triangle équilatéral par $m = 10\,935$ triangles identiques de côtés 3, 5 et 7.





TRIANGLES ENTIERS

Les triangles dont les côtés ont des longueurs qui sont des nombres entiers sont nommés « triangles entiers ». On peut les découper eux-mêmes en triangles entiers. Chacun des 23 découpages topologiques d'un triangle en quatre (voir l'encadré 1) peut être réalisé avec des triangles entiers. En voici quelques-uns. Pour la liste complète, voir <http://mathworld.wolfram.com/TriangleDissection.html>.

► **Problème B.** Pour quels entiers m existe-t-il un triangle T pavable par m triangles identiques et semblables à T ?

Problème C. Pour quels entiers m existe-t-il un triangle T pavable par m triangles identiques ?

Le problème A est assez facile. Le B est assez difficile, mais résolu. Le C reste non résolu.

L'ARITHMÉTIQUE À LA RESCOUSSE

Voici le joli petit raisonnement dû aux mathématiciens américains Stephen Snover, Charles Waiveris et John Williams qui permet de résoudre le problème A. On va répondre à la question en démontrant que pour tout entier positif m , il existe un triangle T pavable par m pavés semblables à T . Ici, on n'impose pas aux pavés d'être de même taille.

Donnons-nous un entier positif quelconque m . D'après le théorème des 4 carrés de Lagrange, conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac en 1621 et démontré en 1770 par Joseph-Louis Lagrange, tout entier positif m s'écrit comme somme de quatre carrés au plus. Il y a donc quatre cas :

- (1) $m = n^2$; (2) $m = n^2 + p^2$; (3) $m = n^2 + p^2 + r^2$;
- (4) $m = n^2 + p^2 + r^2 + s^2$.

Dans le cas (1), on utilise le découpage en n^2 triangles (figure A, encadré 2), qui est possible pour tout triangle T .

Dans le cas (2), on utilise le découpage classique du triangle rectangle en deux triangles rectangles semblables au triangle initial (figure B, encadré 2) par une hauteur, et on redécoupe chacun de ces deux triangles, l'un en n^2 triangles, l'autre en p^2 triangles (figure A, encadré 2). On peut aussi utiliser les découpages de type G, H, I de l'encadré 2.

Dans le cas (3), on utilise l'un des découpages de certains triangles en 3 triangles semblables (figure C), chacun des trois étant à son tour découpé en n^2 , p^2 , et r^2 triangles semblables au triangle de départ.

Dans le cas (4), on procède de la même façon à partir par exemple des découpages en quatre de l'encadré 2 (figures D, E, F).

DÉCOUPAGE POSSIBLE EN N^2 , $3N^2$ OU $N^2 + P^2$ TRIANGLES IDENTIQUES

Le problème B de savoir pour quels entiers m il existe des triangles T pavables par m triangles identiques et semblables à T est aujourd'hui complètement résolu par les mêmes chercheurs que ceux qui ont trouvé l'astuce du théorème de Lagrange. Voici leur solution.

- Pour chaque entier m de la forme n^2 (nombre carré), $3n^2$ (triple d'un carré) ou $n^2 + p^2$ (somme de deux carrés), il existe des triangles T qu'on peut découper en m triangles semblables à T et de même taille. Les entiers de l'une de ces trois formes sont les seuls possibles. Les séries sont :