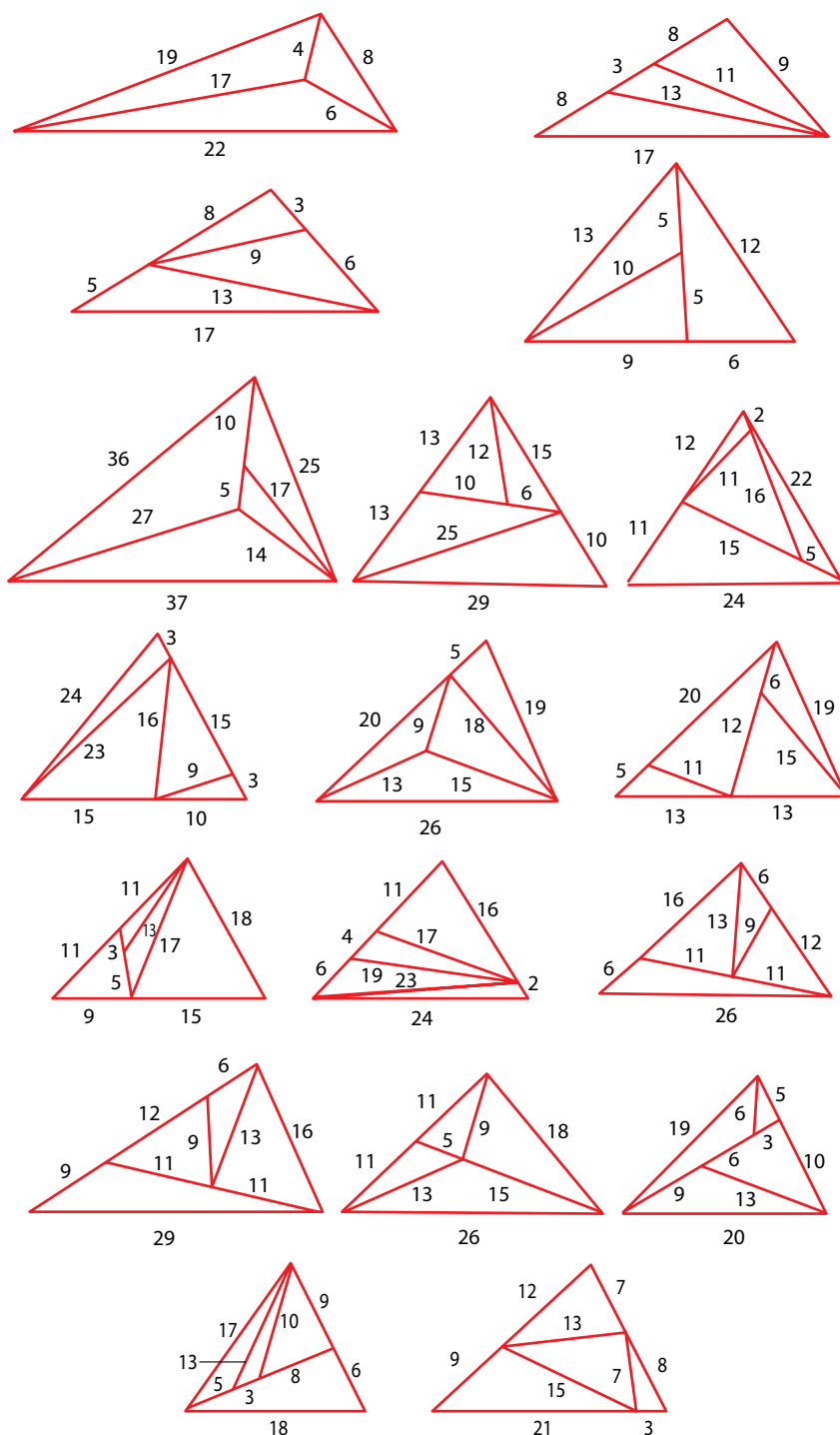




TRIANGLES ENTIERS

Les triangles dont les côtés ont des longueurs qui sont des nombres entiers sont nommés « triangles entiers ». On peut les découper eux-mêmes en triangles entiers. Chacun des 23 découpages topologiques d'un triangle en quatre (voir l'encadré 1) peut être réalisé avec des triangles entiers. En voici quelques-uns. Pour la liste complète, voir <http://mathworld.wolfram.com/TriangleDissection.html>.

Problème B. Pour quels entiers m existe-t-il un triangle T pavable par m triangles identiques et semblables à T ?

Problème C. Pour quels entiers m existe-t-il un triangle T pavable par m triangles identiques?

Le problème A est assez facile. Le B est assez difficile, mais résolu. Le C reste non résolu.

L'ARITHMÉTIQUE À LA RESCOUSSE

Voici le joli petit raisonnement dû aux mathématiciens américains Stephen Snover, Charles Waiveris et John Williams qui permet de résoudre le problème A. On va répondre à la question en démontrant que pour tout entier positif m , il existe un triangle T pavable par m pavés semblables à T . Ici, on n'impose pas aux pavés d'être de même taille.

Donnons-nous un entier positif quelconque m . D'après le théorème des 4 carrés de Lagrange, conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac en 1621 et démontré en 1770 par Joseph-Louis Lagrange, tout entier positif m s'écrit comme somme de quatre carrés au plus. Il y a donc quatre cas : (1) $m = n^2$; (2) $m = n^2 + p^2$; (3) $m = n^2 + p^2 + r^2$; (4) $m = n^2 + p^2 + r^2 + s^2$.

Dans le cas (1), on utilise le découpage en n^2 triangles (figure A, encadré 2), qui est possible pour tout triangle T .

Dans le cas (2), on utilise le découpage classique du triangle rectangle en deux triangles rectangles semblables au triangle initial (figure B, encadré 2) par une hauteur, et on redécoupe chacun de ces deux triangles, l'un en n^2 triangles, l'autre en p^2 triangles (figure A, encadré 2). On peut aussi utiliser les découpages de type G, H, I de l'encadré 2.

Dans le cas (3), on utilise l'un des découpages de certains triangles en 3 triangles semblables (figure C), chacun des trois étant à son tour découpé en n^2 , p^2 , et r^2 triangles semblables au triangle de départ.

Dans le cas (4), on procède de la même façon à partir par exemple des découpages en quatre de l'encadré 2 (figures D, E, F).

DÉCOUPAGE POSSIBLE EN N^2 , $3N^2$ OU $N^2 + P^2$ TRIANGLES IDENTIQUES

Le problème B de savoir pour quels entiers m il existe des triangles T pavables par m triangles identiques et semblables à T est aujourd'hui complètement résolu par les mêmes chercheurs que ceux qui ont trouvé l'astuce du théorème de Lagrange. Voici leur solution.

- Pour chaque entier m de la forme n^2 (nombre carré), $3n^2$ (triple d'un carré) ou $n^2 + p^2$ (somme de deux carrés), il existe des triangles T qu'on peut découper en m triangles semblables à T et de même taille. Les entiers de l'une de ces trois formes sont les seuls possibles. Les séries sont :