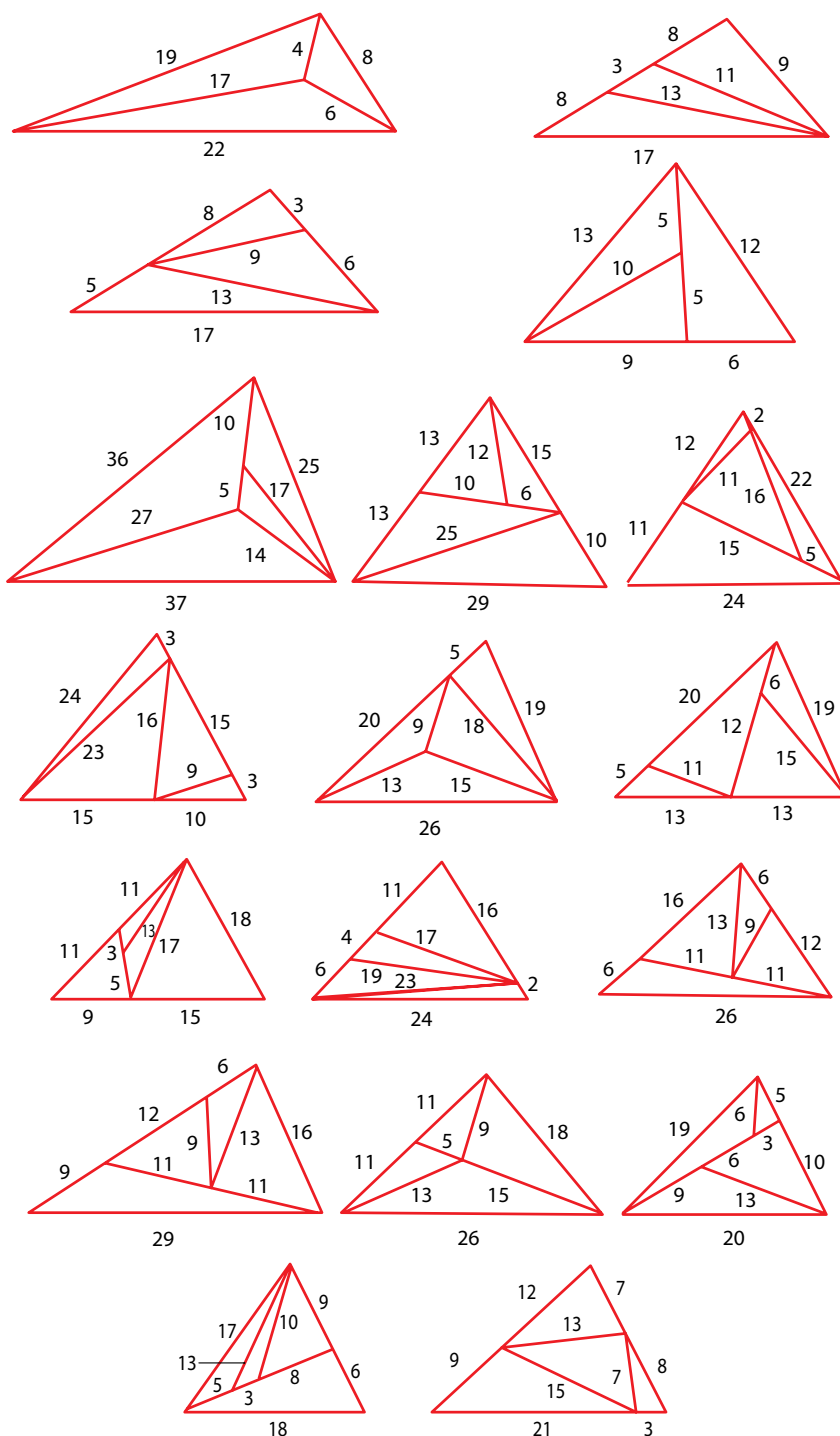




TRIANGLES ENTIERS

Les triangles dont les côtés ont des longueurs qui sont des nombres entiers sont nommés « triangles entiers ». On peut les découper eux-mêmes en triangles entiers. Chacun des 23 découpages topologiques d'un triangle en quatre (voir l'encadré 1) peut être réalisé avec des triangles entiers. En voici quelques-uns. Pour la liste complète, voir <http://mathworld.wolfram.com/TriangleDissection.html>.

► Problème B. Pour quels entiers m existe-t-il un triangle T pavable par m triangles identiques et semblables à T ?

Problème C. Pour quels entiers m existe-t-il un triangle T pavable par m triangles identiques?

Le problème A est assez facile. Le B est assez difficile, mais résolu. Le C reste non résolu.

L'ARITHMÉTIQUE À LA RESCOUSSE

Voici le joli petit raisonnement dû aux mathématiciens américains Stephen Snover, Charles Waiveris et John Williams qui permet de résoudre le problème A. On va répondre à la question en démontrant que pour tout entier positif m , il existe un triangle T pavable par m pavés semblables à T . Ici, on n'impose pas aux pavés d'être de même taille.

Donnons-nous un entier positif quelconque m . D'après le théorème des 4 carrés de Lagrange, conjecturé par Claude-Gaspard Bachet de Méziriac en 1621 et démontré en 1770 par Joseph-Louis Lagrange, tout entier positif m s'écrit comme somme de quatre carrés au plus. Il y a donc quatre cas : (1) $m = n^2$; (2) $m = n^2 + p^2$; (3) $m = n^2 + p^2 + r^2$; (4) $m = n^2 + p^2 + r^2 + s^2$.

Dans le cas (1), on utilise le découpage en n^2 triangles (*figure A, encadré 2*), qui est possible pour tout triangle T.

Dans le cas (2), on utilise le découpage classique du triangle rectangle en deux triangles rectangles semblables au triangle initial (*figure B, encadré 2*) par une hauteur, et on redécoupe chacun de ces deux triangles, l'un en n^3 triangles, l'autre en p^2 triangles (*figure A, encadré 2*). On peut aussi utiliser les découpages de type G, H, I de l'encadré 2.

Dans le cas (3), on utilise l'un des découpages de certains triangles en 3 triangles semblables (*figure C*), chacun des trois étant à son tour découpé en n^2, p^2 , et r^2 triangles semblables au triangle de départ.

Dans le cas (4), on procède de la même façon à partir par exemple des découpages en quatre de l'encadré 2 (*figures D, E, F*).

DÉCOUPAGE POSSIBLE EN $N^2, 3N^2$ OU N^2+P^2 TRIANGLES IDENTIQUES

Le problème B de savoir pour quels entiers m il existe des triangles T pavables par m triangles identiques et semblables à T est aujourd'hui complètement résolu par les mêmes chercheurs que ceux qui ont trouvé l'astuce du théorème de Lagrange. Voici leur solution.

- Pour chaque entier m de la forme n^2 (nombre carré), $3n^2$ (triple d'un carré) ou $n^2 + p^2$ (somme de deux carrés), il existe des triangles T qu'on peut découper en m triangles semblables à T et de même taille. Les entiers de l'une de ces trois formes sont les seuls possibles. Les séries sont:

n^2 : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, ...

$3n^2$: 0, 3, 12, 27, 48, 75, 108, 147, 192, 243, 300, 363, 432, 507, 588, 675, 768, 867, 972, 1083, 1200, 1323, 1452, 1587, 1728, 1875, 2028, 2187, 2352, 2523, 2700, 2883, ...

$n^2 + p^2$: 2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 37, 40, 41, 45, 50, 52, 53, 58, 61, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, ...

En les regroupant jusqu'à 100 (voir <https://oeis.org/A005792>): 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 27, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 48, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 75, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100.

Le résultat pour $3n^2$ provient du découpage en n^2 de chacun des trois triangles de la figure C de l'encadré 2, découpage qui donne, comme on le souhaite, $3n^2$ triangles de même taille et semblables au grand triangle. Pour la série de nombres $n^2 + p^2$, il faut remarquer qu'un triangle rectangle T de côtés n et m peut être utilisé $n^2 + m^2$ fois pour composer un triangle rectangle semblable à T (voir les figures G, H, I de l'encadré 2).

Il faut bien noter que la partie positive du résultat est assez facile (on examine et on contrôle les constructions proposées), mais que ce n'est pas du tout le cas pour la partie négative (consistant à montrer qu'il n'existe aucun autre nombre pour lequel on puisse faire le pavage recherché), qui est sensiblement plus délicate.

POSSIBILITÉS ET IMPOSSIBILITÉS INATTENDUES

Le troisième problème (C) se révèle d'une incroyable difficulté, malgré quelques progrès récents. Rappelons qu'on se demande pour quelles valeurs de m il existe un triangle T pavable par m triangles T' identiques (on n'impose pas ici que T' soit semblable à T).

Ce qui est fascinant dans ce problème, c'est qu'on découvre aujourd'hui encore des pavages que personne n'avait repérés auparavant (voir l'encadré 3). Ainsi, le découpage en 6 est possible maintenant. Plus surprenant, le découpage en 28 est possible. Michael Beeson l'a découvert en utilisant un programme qui devait l'aider à démontrer que 28 n'était pas possible! Le découpage en 44 est aussi possible. Le découpage en $153 = 3^2 + 12^2$ était possible avant (comme somme de deux carrés), mais un pavage inattendu est apparu!

Deux résultats remarquables ont aussi été démontrés. Le premier indique que les valeurs $m=7$ et $m=11$ sont impossibles: aucun triangle ne peut être pavé par 7 ou 11 triangles identiques! N'est-il pas fascinant qu'une propriété générale aussi simple du triangle n'ait pas été

découverte ou même soupçonnée jusqu'à récemment? La plus simple des questions non résolues est la suivante. Existe-t-il des triangles pavables par 14 triangles identiques?

L'autre découverte récente de Michael Beeson est que le pavage du triangle équilatéral est impossible pour tout nombre premier au-delà de 3. On connaît aujourd'hui très mal l'ensemble des valeurs m pour lesquelles le pavage en triangles identiques du triangle équilatéral est possible.

TRIANGLES À CÔTÉS ENTIERS

Les triangles à côtés entiers – nous dirons «triangles entiers» – sont particulièrement élegants et sont à l'origine d'amuses questions associant géométrie et arithmétique. Notons d'abord qu'il résulte de l'inégalité triangulaire (la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres) que tout triplet d'entiers positifs (a, b, c) tel que chaque somme de deux des trois entiers est inférieure au troisième détermine un triangle dont les côtés ont comme longueurs (a, b, c) .

La question du dénombrement de ces triangles entiers n'est pas simple. Le résultat proposé en 2000 par Tom Jenkins et Eric Mullers est le suivant: pour un périmètre donné n , le nombre de triangles entiers est l'entier le plus proche de $n^2/48$ si n est pair, et l'entier le plus proche de $(n+3)^2/48$ si n est impair.

Quand on découpe un triangle entier, peut-on le faire de façon à n'avoir que des sous-triangles entiers? Oui, c'est possible. L'encadré 4 donne notamment quatre exemples correspondant aux quatre découpages topologiquement différents d'un triangle en trois (les quatre dessins du haut). Pour chacune des 23 catégories de découpages d'un triangle en quatre de l'encadré 1, on peut trouver un découpage d'un triangle entier en triangles entiers qui en respecte le schéma. L'encadré 4 en donne quelques-uns (pour les autres, voir <http://mathworld.wolfram.com/TriangleDissection.html>).

Pour terminer, voici trois énoncés simples à propos des triangles entiers:

- Le seul triangle entier dont les longueurs des côtés et l'aire sont des entiers consécutifs est le triangle (3, 4, 5), dont l'aire est 6. Rappelons à ce sujet que l'aire A d'un triangle dont les côtés sont a, b, c est donnée par la formule de Héron:

$$A = (1/4)[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)]^{1/2}.$$

- Le seul triangle entier ayant des entiers consécutifs pour ses côtés et l'une de ses hauteurs est le triangle (13, 14, 15) dont la hauteur à partir du côté 14 vaut 12.

- Les seuls triangles entiers dont l'aire est égale au périmètre sont ceux qui ont pour côtés (5, 12, 13), (6, 8, 10), (6, 25, 29), (7, 15, 20) et (9, 10, 17). ■

BIBLIOGRAPHIE

Article **Integer triangle** de Wikipedia, consulté en mars 2019.

Ed Pegg Jr., **Triangles** sur www.mathpuzzle.com/triangle.html, consulté en mars 2019.

M. Beeson, **No triangle can be cut into seven congruent triangles**, 2019 (<http://arxiv.org/abs/1811.09723v4>).

T. Jenkyns et E. Muller, **Triangular triples from ceilings to floors**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, pp. 634-639, 2000.

A. Soifer, **How Does One Cut a Triangle?**, Springer, 2009.

M. Laczkovich, **Tilings of triangles**, *Discrete Mathematics*, vol. 140, pp. 79-94, 1995.

S. L. Snover et al., **Rep-tiling for triangles**, *Discrete Mathematics*, vol. 91, pp. 193-200, 1991.