

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

DES TROUS À ENTOURER AVEC PARCIMONIE

Laisser des trous dans un assemblage de carrés en minimisant le nombre de pièces utilisées: ce problème de géométrie n'est pas facile. Mais le cheminement vers sa solution illustre bien la démarche des mathématiciens.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal)

Le tâtonnement et la construction progressive de la solution d'une énigme géométrique d'apparence simple sont les sujets de cette rubrique. L'objectif est d'illustrer les diverses étapes qu'un mathématicien doit franchir pour comprendre un problème, et l'intérêt de passer de la découverte d'une solution dont on vérifie la justesse à la certitude qui ne s'obtient qu'en élaborant une démonstration. Ainsi, le travail de recherche comporte plusieurs phases plus ou moins entremêlées:

a) La prise de contact avec le problème, sa formulation claire et le traitement de quelques cas particuliers.

b) La prise de conscience des difficultés et l'approfondissement de l'exploration, conduisant à la découverte de régularités et à la formulation d'hypothèses.

c) La mise au point d'une réponse vraisemblable accompagnée de quelques calculs pour formuler la solution.

d) L'élaboration d'une démonstration complète, nécessitant une compréhension approfondie du problème et l'introduction d'idées nouvelles. Lors de cette phase, on démontre parfois des résultats intéressants, au-delà de la question initiale.

e) La formulation d'autres problèmes proches que la méthode trouvée permet de traiter, ou qui sont liés mais demanderaient un travail nouveau.

Nous nous intéresserons aux formes du plan composées de pièces carrées de côté

unitaire, posées côté contre côté que nous dénommerons ici «formes» (voir l'encadré 1).

Posons-nous la question: pour un entier n donné, combien faut-il au minimum de carrés pour assembler une forme présentant n trous? Nous noterons $f(n)$ ce nombre minimal.

Pour que le problème soit bien défini, précisons que des trous distincts ne doivent pas se toucher, et que seuls comptent les trous totalement entourés de carrés. Nous pourrions adopter d'autres conventions, mais elles définiraient d'autres problèmes.

EXPÉRIMENTATION

La première chose à faire est de résoudre le problème pour les petites valeurs de n . Pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$, c'est simple. Il est clair que l'on ne peut pas faire mieux que les formes dessinées sur les figures 2a, 2b, 2c. On a donc $f(1)=8$, $f(2)=13$, $f(3)=18$. Remarquons que pour $n=3$, il y a trois figures différentes de 18 carrés comportant trois trous.

Ces premiers cas pourraient suggérer que l'on a, pour tout entier n , $f(n+1)=f(n)+5$. Avec $f(1)=8$, cela conduirait à la formule générale $f(n)=3+5n$ et donc à $f(4)=23$. C'est faux! Il semble plutôt que $f(4)=21$ (voir la figure 2f).

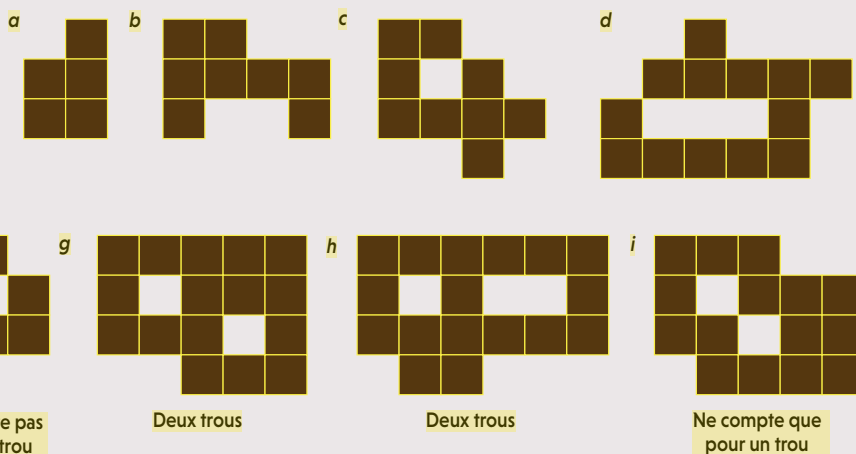
Pour $n=4$, on gagne quelque chose en renonçant à aligner les trous. Pour $n=5$ et 6, il n'est pas possible de faire mieux que 26 et 29.

Pour $n=5$, il faut à nouveau ajouter 5 au résultat précédent ($f(5)=26$), mais pour $n=6$, il suffit d'ajouter 3, puisque $f(6)=29$. La règle semble obscure: parfois on doit ajouter 3 au résultat précédent, parfois il faut ajouter 5.



Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Par définition, une « forme » désigne ici un assemblage de pièces carrées collées côté contre côté (a, b, c, d). La définition des trous est précisée par les figures e, f, g, h, i .



2

Le problème est de trouver, pour chaque entier positif n , le nombre minimum $f(n)$ de carrés qu'il faut utiliser pour créer une forme (au sens indiqué dans l'encadré 1) dotée de n trous. On a représenté sur les figures a, b, c, d, e, f, g, h les solutions pour les valeurs du nombre n de trous égales à 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pour ces valeurs, les nombres de carrés sont, respectivement, 8, 13, 18, 21, 26, 29.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	8	13	18	21	26	29	34	37	40	45
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	48	51	56	59	62	65	70	73	76	79
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f(n)$	84	87	90	93	96	101	104	107	110	113
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$f(n)$	118	121	123	127	130	133	138	141	144	147

L'observation attentive suggère une hypothèse pour les ajouts de 3 ou de 5 d'un cas au suivant. On note en effet que les ajouts sont successivement: +5 +5 +3 +5 +3 +5 +3 +3 +5 +3 +3 +3 +5 ...

1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 ...

Figure 1 displays eight 5x5 grids (a-h) illustrating different arrangements of black and white squares. The number of black squares in each grid is indicated below the grid:

- a: 8 black squares
- b: 13 black squares
- c: 18 black squares
- d: 18 black squares
- e: 18 black squares
- f: 21 black squares
- g: 26 black squares
- h: 29 black squares