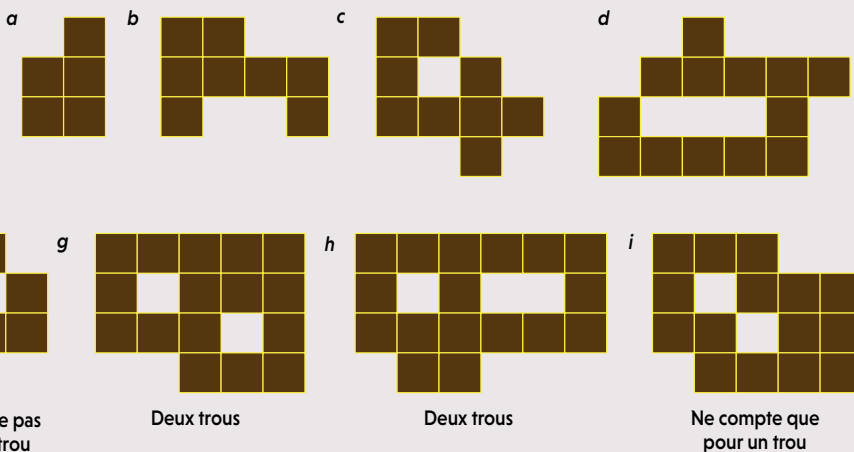


DES FORMES TROUÉES AVEC DES CARRÉS

1

Par définition, une « forme » désigne ici un assemblage de pièces carrées collées côté contre côté (a, b, c, d). La définition des trous est précisée par les figures e, f, g, h, i.



On continue donc aussi soigneusement que possible. On pourrait concevoir un programme informatique qui résoudrait de manière certaine les cas envisagés en explorant toutes les combinaisons possibles pour des valeurs de n fixées. Cependant, il ne donnerait pas la solution pour tout n , et surtout il ne donnerait pas de démonstration. Par ailleurs, les situations pour n assez petit ne sont pas très compliquées et on a peu de doute sur les valeurs qu'on découvre par tâtonnements. Pour y voir clair, on constitue, sans être absolument certain de sa justesse, un tableau dont voici les premières valeurs.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	8	13	18	21	26	29	34	37	40	45
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	48	51	56	59	62	65	70	73	76	79
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f(n)$	84	87	90	93	96	101	104	107	110	113
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$f(n)$	118	121	123	127	130	133	138	141	144	147

QUELLE EST LA RÈGLE?

L'observation attentive suggère une hypothèse pour les ajouts de 3 ou de 5 d'un cas au suivant. On note en effet que les ajouts sont successivement: +5 +5 +3 +5 +3 +5 +3 +3 +5 +3 +3 +5 +3 +3 +3 +5 +3 +3 +3 +5 ...

Les +5 sont isolés (sauf au tout début) et séparés par des séquences de +3 dont la longueur s'accroît d'une unité une fois sur deux:

1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 ...

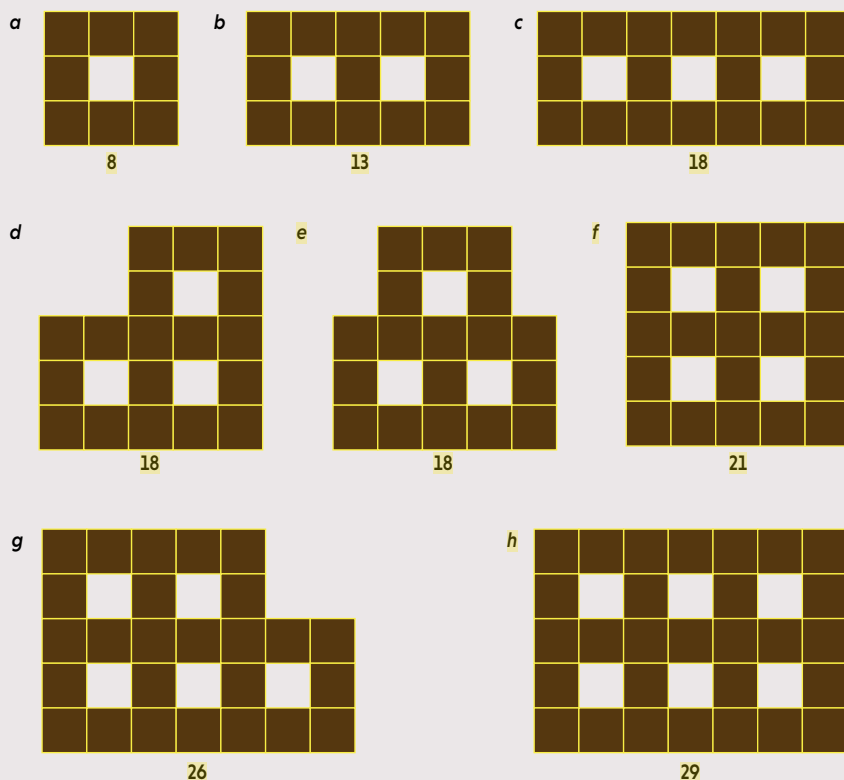
Si l'on ne s'est pas trompé dans le tableau, cela pourrait être la solution, mais comment être certain que cette règle observée est juste? Et si oui, quelle pourrait en être la raison?

L'expérience acquise dans la résolution sans démonstration des premiers cas suggère >

2

LE PROBLÈME À RÉSOUDRE

Le problème est de trouver, pour chaque entier positif n , le nombre minimum $f(n)$ de carrés qu'il faut utiliser pour créer une forme (au sens indiqué dans l'encadré 1) dotée de n trous. On a représenté sur les figures a, b, c, d, e, f, g, h les solutions pour les valeurs du nombre n de trous égales à 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pour ces valeurs, les nombres de carrés sont, respectivement, 8, 13, 18, 21, 26, 29.



➤ qu'on peut créer un nouveau trou avec 5 carrés (en construisant une rangée, ou barre, de trous, comme celles des figures 2a, 2b, 2c, ou en commençant une nouvelle barre), mais que parfois on peut s'en sortir avec seulement 3 carrés nouveaux à la condition de s'appuyer à la fois sur une barre déjà construite et sur un trou déjà construit de la nouvelle barre.

Simplifions le problème. Nous n'envisagerons que des constructions fonctionnant en partant d'une barre horizontale de base, puis en posant de nouvelles barres de même longueur sur la première tant que c'est possible. Nous les appellerons « formes standard » (voir la figure 3d). Nous envisageons ces formes particulières, car nous avons l'impression que nous ne pouvons avoir mieux que ce qu'elles donnent. Il faudra nous en assurer plus tard.

En construisant une forme standard pour un nombre donné n de trous, avec le but d'utiliser le minimum de carrés pour créer des trous, deux objectifs s'opposent. Pour avoir le plus de trous exigeant 3 nouveaux carrés, nous avons intérêt à avoir une barre horizontale de base aussi longue que possible (car le premier trou d'une nouvelle barre nécessite l'ajout de

5 carrés et les autres de la même barre seulement 3; il est donc intéressant de limiter le nombre total de barres. Cependant, chaque trou supplémentaire de la première barre horizontale coûte 5 carrés, il faudrait donc limiter aussi la longueur de la première barre horizontale. La question est donc: pour minimiser le nombre de carrés utilisés, faut-il minimiser le nombre de barres mises les unes sur les autres, ou minimiser la longueur de la première barre construite?

Pour répondre, comptons. Le nombre de fois que nous devons utiliser 5 carrés pour un nouveau trou est égal au nombre de trous de la première barre moins 1 (le premier trou exige huit carrés), auquel on additionne le nombre de barres moins 1 (puisque la première barre est déjà comptée). Si l'on n'envisage que des formes standard, pour avoir le minimum de carrés, il faut donc minimiser la somme $l-1+h-1$ (où l est le nombre de trous de la première barre et h le nombre de barres), ce qui revient à minimiser la somme $l+h$ avec la contrainte que $lh \geq n$ pour qu'il y ait n trous.

Sous réserve de démontrer qu'on ne peut pas mieux faire que ces formes standard, le minimum de carrés pour n trous sera obtenu

3

TROIS CARRÉS, CINQ CARRÉS ET FORMES STANDARD

Quand on construit une barre (ou rangée) de trous, 5 carrés sont nécessaires pour chaque nouveau trou (a). De même, quand on crée une nouvelle barre de trous posée sur des barres déjà construites, le premier trou exige 5 carrés (b).

En revanche seuls 3 nouveaux carrés sont nécessaires si l'on s'appuie sur une barre déjà créée en même temps qu'on s'appuie sur un trou déjà créé de la barre de trous (c).

Dans un premier temps, pour traiter le problème, on se limite aux formes composées de barres horizontales de trous, posées les unes sur les autres et de même longueur, sauf éventuellement la dernière.

Ces formes particulières (d) sont dénommées « formes standard ». On fait le pari qu'on ne peut pas faire mieux que ces formes standard... ce que l'on démontrera.

