

- > qu'on peut créer un nouveau trou avec 5 carrés (en construisant une rangée, ou barre, de trous, comme celles des figures 2a, 2b, 2c, ou en commençant une nouvelle barre), mais que parfois on peut s'en sortir avec seulement 3 carrés nouveaux à la condition de s'appuyer à la fois sur une barre déjà construite et sur un trou déjà construit de la nouvelle barre.

Simplifions le problème. Nous n'envisagerons que des constructions fonctionnant en partant d'une barre horizontale de base, puis en posant de nouvelles barres de même longueur sur la première tant que c'est possible. Nous les appellerons « formes standard » (voir la figure 3d). Nous envisageons ces formes particulières, car nous avons l'impression que nous ne pouvons avoir mieux que ce qu'elles donnent. Il faudra nous en assurer plus tard.

En construisant une forme standard pour un nombre donné n de trous, avec le but d'utiliser le minimum de carrés pour créer des trous, deux objectifs s'opposent. Pour avoir le plus de trous exigeant 3 nouveaux carrés, nous avons intérêt à avoir une barre horizontale de base aussi longue que possible (car le premier trou d'une nouvelle barre nécessite l'ajout de

5 carrés et les autres de la même barre seulement 3; il est donc intéressant de limiter le nombre total de barres. Cependant, chaque trou supplémentaire de la première barre horizontale coûte 5 carrés, il faudrait donc limiter aussi la longueur de la première barre horizontale. La question est donc: pour minimiser le nombre de carrés utilisés, faut-il minimiser le nombre de barres mises les unes sur les autres, ou minimiser la longueur de la première barre construite?

Pour répondre, comptons. Le nombre de fois que nous devons utiliser 5 carrés pour un nouveau trou est égal au nombre de trous de la première barre moins 1 (le premier trou exige huit carrés), auquel on additionne le nombre de barres moins 1 (puisque la première barre est déjà comptée). Si l'on n'envisage que des formes standard, pour avoir le minimum de carrés, il faut donc minimiser la somme $l-1+h-1$ (où l est le nombre de trous de la première barre et h le nombre de barres), ce qui revient à minimiser la somme $l+h$ avec la contrainte que $lh \geq n$ pour qu'il y ait n trous.

Sous réserve de démontrer qu'on ne peut pas mieux faire que ces formes standard, le minimum de carrés pour n trous sera obtenu

3

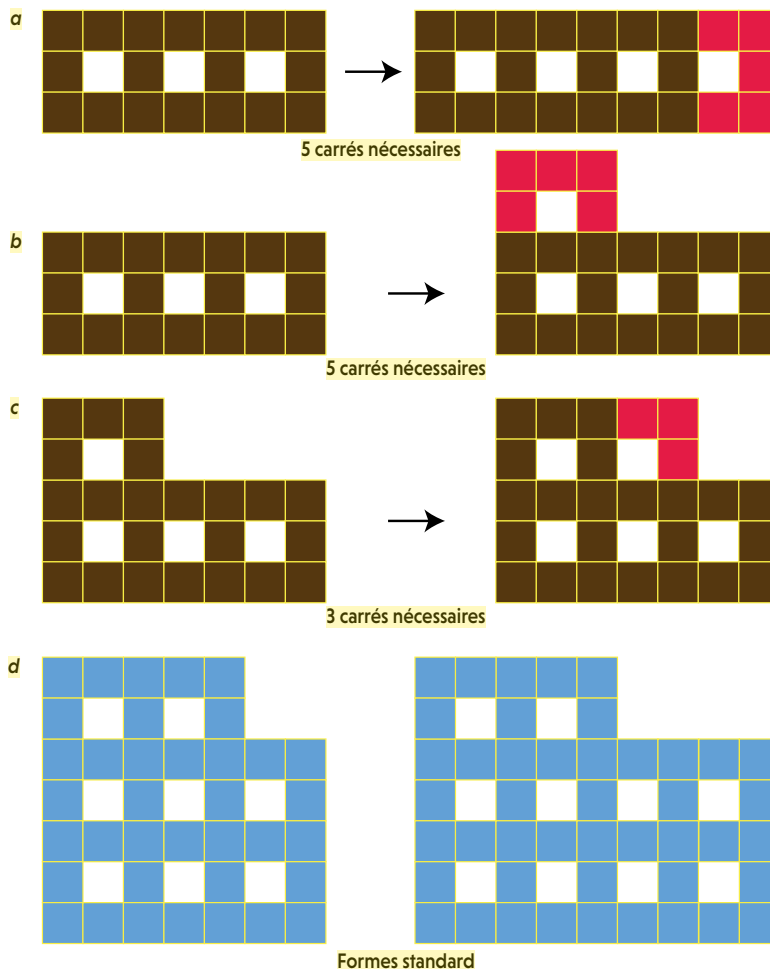
TROIS CARRÉS, CINQ CARRÉS ET FORMES STANDARD

Quand on construit une barre (ou rangée) de trous, 5 carrés sont nécessaires pour chaque nouveau trou (a). De même, quand on crée une nouvelle barre de trous posée sur des barres déjà construites, le premier trou exige 5 carrés (b).

En revanche seuls 3 nouveaux carrés sont nécessaires si l'on s'appuie sur une barre déjà créée en même temps qu'on s'appuie sur un trou déjà créé de la barre de trous (c).

Dans un premier temps, pour traiter le problème, on se limite aux formes composées de barres horizontales de trous, posées les unes sur les autres et de même longueur, sauf éventuellement la dernière.

Ces formes particulières (d) sont dénommées « formes standard ». On fait le pari qu'on ne peut pas faire mieux que ces formes standard... ce que l'on démontrera.



par la construction d'une forme de ce type vérifiant $lh \geq n$ et $l+h$ minimum.

NOMBRES DE CARRÉS COMPOSANT UNE FORME STANDARD

Si nous avons raison de ne considérer que des formes standard, la réponse $f(n)$ est le nombre de carrés de ces formes. Pour une forme standard, il faut $3n$ carrés, car chaque trou demande au moins trois carrés nouveaux. À ces $3n$, nous devons ajouter 5 pour le premier trou qui demande 8 carrés, puis ajouter 2 pour chacun des autres trous de la première barre, donc $2(l-1)$, et enfin ajouter 2 pour chaque premier trou de chaque barre après la première, donc $2(h-1)$. Au total, une forme standard de n trous demande $3n+5+2(l-1)+2(h-1)=3n+2l+2h+1$ carrés, où l est le nombre de trous de la première barre horizontale et h le nombre de barres horizontales. La forme sera la meilleure possible pour n trous si $lh \geq n$ et $l+h$ minimum.

Vérification de la formule. Pour $n=1$, nous avons $l=h=1$, donc $3n+2l+2h+1=8$ carrés, ce qui est le résultat attendu. Pour $n=4$, on a $l=h=2$, donc $3n+2l+2h+1=12+4+4+1=21$. Cela correspond à nos dessins et au tableau.

Nous sommes sur une bonne piste; reste à justifier l'hypothèse sur les formes standard et à résoudre la minimisation de $l+h$, avec $lh \geq n$.

VIEUX RÉSULTATS SUR LES DISQUES ET LES RECTANGLES

Un entier n étant donné, comment déterminer dans le cas général deux entiers l et h tels que $lh \geq n$ avec $l+h$ minimum?

Une idée vient à l'esprit: il faut faire le plus carré possible, donc l et h les plus égaux possible. Le problème est analogue aux problèmes des courbes fermées délimitant une aire donnée: la courbe ayant la plus petite longueur pour une aire fixée est le cercle. Ce résultat, dénommé théorème des isopérimètres, est dû à Jacques Bernoulli qui, sans le démontrer d'une manière parfaitement satisfaisante, en a eu clairement conscience. Seul le xx^e siècle réussira à produire une preuve complète de l'énoncé.

Une question plus proche encore de la nôtre et plus simple à traiter rigoureusement a été abordée dès l'Antiquité par Zénodore au III^e siècle avant notre ère. Il se demandait quel polygone à c côtés (c fixé) délimitant une aire fixée possède le plus petit périmètre. La réponse est le polygone régulier à c côtés. Dans le cas $c=4$, cela signifie que parmi tous les rectangles délimitant une aire donnée (et même plus généralement parmi tous les quadrilatères), le carré est celui de plus petit périmètre. C'est presque la question qui nous occupe ici.

Pour le problème des trous, nous obtenons que les nombres entiers l et h tels que $lh \geq n$ avec $l+h$ minimum (c'est la même chose que minimiser le périmètre de rectangles de côtés l et h)

4

BORDER UN TROU ET UNE FORME

À chaque trou, on associe une bande de largeur $1/2$ qui l'entoure (a). Pour un trou de côté 1, l'aire de cette bande (en bleu foncé) est 3. Les bandes associées à des trous différents ne se chevauchent pas. Pour obtenir n trous, il faut donc au moins $3n$ pièces carrées.

La bande de largeur $1/2$ (en vert) qui suit le pourtour d'une forme contenue dans un

rectangle de hauteur H et de largeur L est d'aire $H+L-1$ s'il n'y a pas de renforcement (b); on le démontre en enlevant des coins (c). L'aire de la bande verte est plus grande s'il y a des renforcements (d; les carrés rouges du renforcement n'ont pas de correspondants, e).

Notons que la bande qui suit le pourtour ne chevauche aucune des bandes bordant les trous.

