

par la construction d'une forme de ce type vérifiant $lh \geq n$ et $l+h$ minimum.

NOMBRES DE CARRÉS COMPOSANT UNE FORME STANDARD

Si nous avons raison de ne considérer que des formes standard, la réponse $f(n)$ est le nombre de carrés de ces formes. Pour une forme standard, il faut $3n$ carrés, car chaque trou demande au moins trois carrés nouveaux. À ces $3n$, nous devons ajouter 5 pour le premier trou qui demande 8 carrés, puis ajouter 2 pour chacun des autres trous de la première barre, donc $2(l-1)$, et enfin ajouter 2 pour chaque premier trou de chaque barre après la première, donc $2(h-1)$. Au total, une forme standard de n trous demande $3n + 5 + 2(l-1) + 2(h-1) = 3n + 2l + 2h + 1$ carrés, où l est le nombre de trous de la première barre horizontale et h le nombre de barres horizontales. La forme sera la meilleure possible pour n trous si $lh \geq n$ et $l+h$ minimum.

Vérification de la formule. Pour $n=1$, nous avons $l=h=1$, donc $3n + 2l + 2h + 1 = 8$ carrés, ce qui est le résultat attendu. Pour $n=4$, on a $l=h=2$, donc $3n + 2l + 2h + 1 = 12 + 4 + 4 + 1 = 21$. Cela correspond à nos dessins et au tableau.

Nous sommes sur une bonne piste; reste à justifier l'hypothèse sur les formes standard et à résoudre la minimisation de $l+h$, avec $lh \geq n$.

VIEUX RÉSULTATS SUR LES DISQUES ET LES RECTANGLES

Un entier n étant donné, comment déterminer dans le cas général deux entiers l et h tels que $lh \geq n$ avec $l+h$ minimum?

Une idée vient à l'esprit: il faut faire le plus carré possible, donc l et h les plus égaux possible. Le problème est analogue aux problèmes des courbes fermées délimitant une aire donnée: la courbe ayant la plus petite longueur pour une aire fixée est le cercle. Ce résultat, dénommé théorème des isopérimètres, est dû à Jacques Bernoulli qui, sans le démontrer d'une manière parfaitement satisfaisante, en a eu clairement conscience. Seul le xx^e siècle réussira à produire une preuve complète de l'énoncé.

Une question plus proche encore de la nôtre et plus simple à traiter rigoureusement a été abordée dès l'Antiquité par Zénodore au III^e siècle avant notre ère. Il se demandait quel polygone à c côtés (c fixé) délimitant une aire fixée possède le plus petit périmètre. La réponse est le polygone régulier à c côtés. Dans le cas $c=4$, cela signifie que parmi tous les rectangles délimitant une aire donnée (et même plus généralement parmi tous les quadrilatères), le carré est celui de plus petit périmètre. C'est presque la question qui nous occupe ici.

Pour le problème des trous, nous obtenons que les nombres entiers l et h tels que $lh \geq n$ avec $l+h$ minimum (c'est la même chose que minimiser le périmètre de rectangles de côtés l et h)

4

BORDER UN TROU ET UNE FORME

À chaque trou, on associe une bande de largeur 1/2 qui l'entoure (a). Pour un trou de côté 1, l'aire de cette bande (en bleu foncé) est 3. Les bandes associées à des trous différents ne se chevauchent pas. Pour obtenir n trous, il faut donc au moins $3n$ pièces carrées.

La bande de largeur 1/2 (en vert) qui suit le pourtour d'une forme contenue dans un

rectangle de hauteur H et de largeur L est d'aire $H + L - 1$ s'il n'y a pas de renforcement (b); on le démontre en enlevant des coins (c). L'aire de la bande verte est plus grande s'il y a des renforcements (d; les carrés rouges du renforcement n'ont pas de correspondants, e).

Notons que la bande qui suit le pourtour ne chevauche aucune des bandes bordant les trous.

