

par la construction d'une forme de ce type vérifiant $lh \geq n$ et $l+h$ minimum.

NOMBRES DE CARRÉS COMPOSANT UNE FORME STANDARD

Si nous avons raison de ne considérer que des formes standard, la réponse $f(n)$ est le nombre de carrés de ces formes. Pour une forme standard, il faut $3n$ carrés, car chaque trou demande au moins trois carrés nouveaux. À ces $3n$, nous devons ajouter 5 pour le premier trou qui demande 8 carrés, puis ajouter 2 pour chacun des autres trous de la première barre, donc $2(l-1)$, et enfin ajouter 2 pour chaque premier trou de chaque barre après la première, donc $2(h-1)$. Au total, une forme standard de n trous demande $3n + 5 + 2(l-1) + 2(h-1) = 3n + 2l + 2h + 1$ carrés, où l est le nombre de trous de la première barre horizontale et h le nombre de barres horizontales. La forme sera la meilleure possible pour n trous si $lh \geq n$ et $l+h$ minimum.

Vérification de la formule. Pour $n=1$, nous avons $l=h=1$, donc $3n + 2l + 2h + 1 = 8$ carrés, ce qui est le résultat attendu. Pour $n=4$, on a $l=h=2$, donc $3n + 2l + 2h + 1 = 12 + 4 + 4 + 1 = 21$. Cela correspond à nos dessins et au tableau.

Nous sommes sur une bonne piste; reste à justifier l'hypothèse sur les formes standard et à résoudre la minimisation de $l+h$, avec $lh \geq n$.

VIEUX RÉSULTATS SUR LES DISQUES ET LES RECTANGLES

Un entier n étant donné, comment déterminer dans le cas général deux entiers l et h tels que $lh \geq n$ avec $l+h$ minimum?

Une idée vient à l'esprit: il faut faire le plus carré possible, donc l et h les plus égaux possible. Le problème est analogue aux problèmes des courbes fermées délimitant une aire donnée: la courbe ayant la plus petite longueur pour une aire fixée est le cercle. Ce résultat, dénommé théorème des isopérimètres, est dû à Jacques Bernoulli qui, sans le démontrer d'une manière parfaitement satisfaisante, en a eu clairement conscience. Seul le xx^e siècle réussira à produire une preuve complète de l'énoncé.

Une question plus proche encore de la nôtre et plus simple à traiter rigoureusement a été abordée dès l'Antiquité par Zénodore au 11^e siècle avant notre ère. Il se demandait quel polygone à c côtés (c fixé) délimitant une aire fixée possède le plus petit périmètre. La réponse est le polygone régulier à c côtés. Dans le cas $c=4$, cela signifie que parmi tous les rectangles délimitant une aire donnée (et même plus généralement parmi tous les quadrilatères), le carré est celui de plus petit périmètre. C'est presque la question qui nous occupe ici.

Pour le problème des trous, nous obtenons que les nombres entiers l et h tels que $lh \geq n$ avec $l+h$ minimum (c'est la même chose que minimiser le périmètre de rectangles de côtés l et h)

4

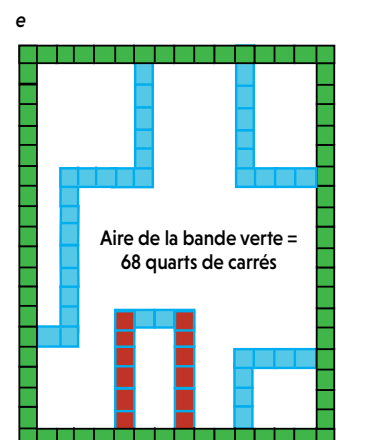
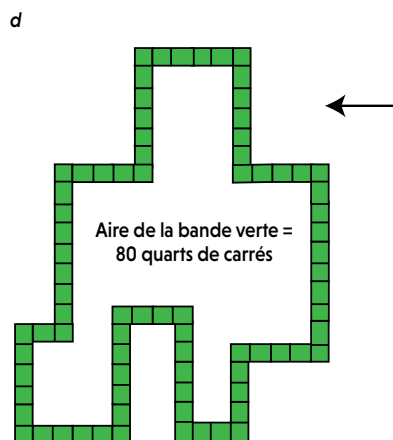
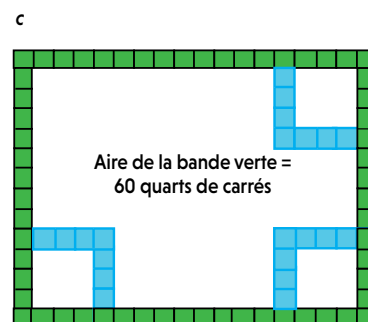
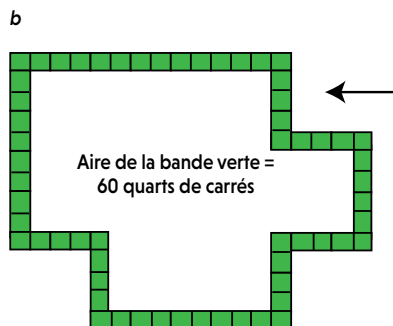
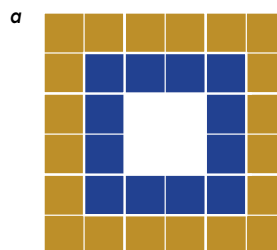
BORDER UN TROU ET UNE FORME

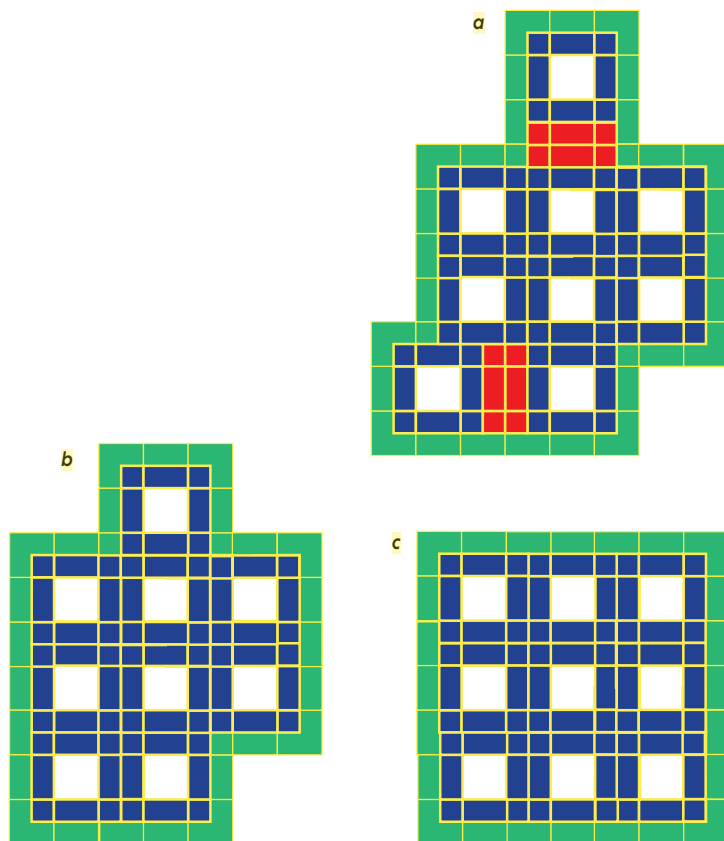
À chaque trou, on associe une bande de largeur $1/2$ qui l'entoure (a). Pour un trou de côté 1, l'aire de cette bande (en bleu foncé) est 3. Les bandes associées à des trous différents ne se chevauchent pas. Pour obtenir n trous, il faut donc au moins $3n$ pièces carrées.

La bande de largeur $1/2$ (en vert) qui suit le pourtour d'une forme contenue dans un

rectangle de hauteur H et de largeur L est d'aire $H + L - 1$ s'il n'y a pas de renforcement (b); on le démontre en enlevant des coins (c). L'aire de la bande verte est plus grande s'il y a des renforcements (d; les carrés rouges du renforcement n'ont pas de correspondants, e).

Notons que la bande qui suit le pourtour ne chevauche aucune des bandes bordant les trous.





5

ESPACES PERDUS

La forme à 9 trous (a) faite de 48 carrés comporte deux espaces perdus (en rouge) qui ne sont ni la bordure d'un trou ni la bordure du périmètre.

La forme à 9 trous (b) utilise 42 carrés sans espace perdu, mais avec une mauvaise disposition des trous carrés.

La forme optimale pour 9 trous utilise 40 carrés (c) : il n'y a pas d'espace perdu et la disposition des trous est optimale.

> sont ceux correspondant aux formes les plus carrées, donc ceux où l et h sont les plus égaux possible. Ici, cela donne $l=h$, ou bien l diffère de h d'une unité. L'intuition que le carré est la meilleure façon de faire est confirmée. Une démonstration directe de cette propriété arithmétique est possible.

Exemples. Pour avoir $lh \geq 8$ avec $l+h$ minimal, il faut prendre $l=h=3$. Pour avoir $lh \geq 11$ avec $l+h$ minimal, il faut prendre $l=3$ et $h=4$ ou $l=4$ et $h=3$. Notons que, parfois, d'autres couples éloignés de plus d'une unité font aussi bien que ceux éloignés de 0 ou 1 unité (mais ils ne font pas mieux). Ainsi, pour avoir $lh \geq 10$ avec $l+h$ minimal, on trouve $l=3$ et $h=4$ ou $l=4$ et $h=3$, mais on a aussi $l=5$ et $h=2$, ou $l=2$ et $h=5$.

Où en sommes-nous de notre problème ? Il semble que nous détenons la solution, mais nous ne l'avons pas démontrée, car nous avons recherché des solutions uniquement en

considérant des formes standard. N'y a-t-il pas des formes d'un autre type faisant mieux que les formes standard ? Il faut prouver que non.

L'AIRE MINIMALE EXIGÉE ET RÉSERVÉE PAR TROU

Une idée consiste à examiner l'aire minimale de pièces carrées qu'entraîne inévitablement la présence d'un trou en prenant en compte que, d'après les règles du jeu, chaque trou doit être entièrement entouré de pièces carrées. Chaque trou de côté 1 doit par exemple être entouré de 8 carrés exactement. Certains de ces carrés pourraient être utilisés en même temps pour entourer d'autres trous ; on ne peut donc pas dire que chaque trou impose au moins huit carrés. En revanche, si l'on découpe chaque pièce carrée en quatre carrés plus petits de côté $1/2$, on peut affirmer que les petits carrés de côté $1/2$ qui bordent le trou ne pourront pas border un autre trou. Il y a 12 petits carrés de côté $1/2$ qui bordent un trou de 1 carré. Leur aire est 3 (car $12 \times 1/4 = 3$) ; ils forment une bande de largeur $1/2$ autour du trou, et chaque petit carré de cette bande est réservé pour le trou qu'il borde (voir l'encadré 4).

Il faut donc au moins une aire de $3n$ unités pour constituer l'ensemble des bandes autour de n trous ; et bien sûr, pour cette aire de $3n$ unités, il faut au moins $3n$ pièces carrées. Pour des trous ayant une aire supérieure à 1, il faut réserver un nombre plus grand de petits carrés pour la bande le bordant, mais chaque trou exigera au moins 3 pièces carrées pour lui et donc n trous exigeront dans le meilleur des cas $3n$ carrés. Cela démontre que $f(n) \geq 3n$.

Nous savons aussi que, grâce aux formes standard, nous pouvons faire n trous avec $3n+2l+2h+1$ pièces carrées, $lh \geq n$ et $l+h$ minimal ; autrement dit, $f(n) \leq 3n+2l+2h+1$. Nous pourrions conclure si nous réussissons à améliorer l'inégalité $f(n) \geq 3n$ que nous venons d'obtenir avec les bandes autour des trous.

La solution va provenir de la prise en considération du périmètre des formes. Toute forme a un pourtour, et la bande d'épaisseur $1/2$ qui suit ce pourtour n'est jamais utile pour entourer un trou. L'aire de cette bande dépend du périmètre de la forme.

On montre que cette bande a une aire au moins égale à $H+L-1$, où H et L sont la hauteur et la largeur du plus petit rectangle contenant la forme (voir l'encadré 4). Or pour faire tenir n trous qui ne se touchent pas, il faut au moins une hauteur $2h+1$ et une largeur $2l+1$ avec $hl \geq n$. L'aire de toutes les bandes d'épaisseur $1/2$ autour des trous et le long du périmètre est donc au moins égale à $3n+(2l+1)+(2h+1)-1 = 3n+2l+2h+1$, avec $lh \geq n$ et $l+h$ minimal.

La bande de largeur $1/2$ qui suit le pourtour d'une forme contenue dans un rectangle de hauteur H et de largeur L a une aire égale à