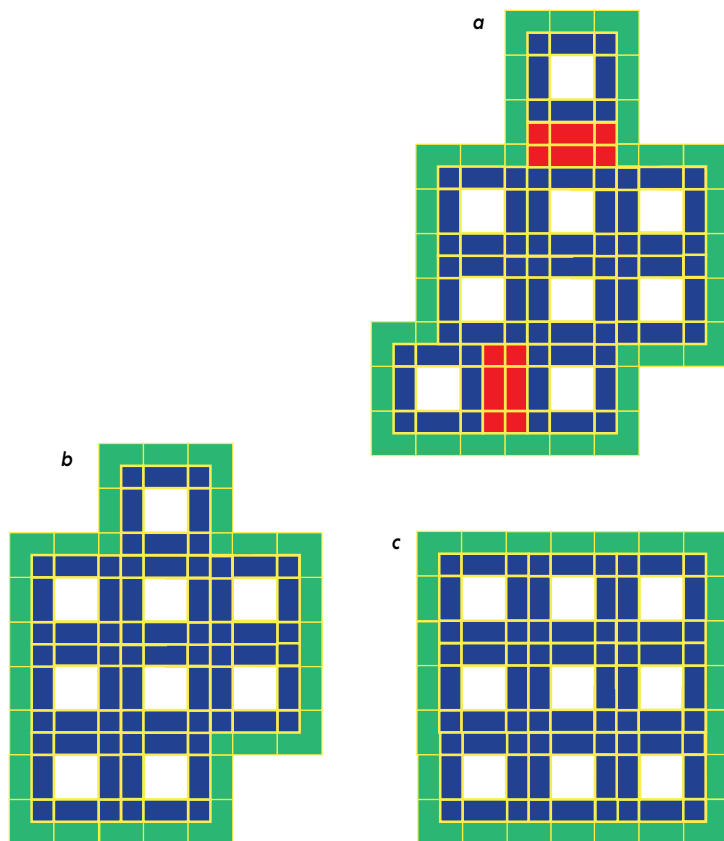




5

ESPACES PERDUS

La forme à 9 trous (a) faite de 48 carrés comporte deux espaces perdus (en rouge) qui ne sont ni la bordure d'un trou ni la bordure du périmètre.

La forme à 9 trous (b) utilise 42 carrés sans espace perdu, mais avec une mauvaise disposition des trous carrés.

La forme optimale pour 9 trous utilise 40 carrés (c) : il n'y a pas d'espace perdu et la disposition des trous est optimale.

> sont ceux correspondant aux formes les plus carrées, donc ceux où l et h sont les plus égaux possible. Ici, cela donne $l=h$, ou bien l diffère de h d'une unité. L'intuition que le carré est la meilleure façon de faire est confirmée. Une démonstration directe de cette propriété arithmétique est possible.

Exemples. Pour avoir $lh \geq 8$ avec $l+h$ minimal, il faut prendre $l=h=3$. Pour avoir $lh \geq 11$ avec $l+h$ minimal, il faut prendre $l=3$ et $h=4$ ou $l=4$ et $h=3$. Notons que, parfois, d'autres couples éloignés de plus d'une unité font aussi bien que ceux éloignés de 0 ou 1 unité (mais ils ne font pas mieux). Ainsi, pour avoir $lh \geq 10$ avec $l+h$ minimal, on trouve $l=3$ et $h=4$ ou $l=4$ et $h=3$, mais on a aussi $l=5$ et $h=2$, ou $l=2$ et $h=5$.

Où en sommes-nous de notre problème? Il semble que nous détenons la solution, mais nous ne l'avons pas démontrée, car nous avons recherché des solutions uniquement en

considérant des formes standard. N'y a-t-il pas des formes d'un autre type faisant mieux que les formes standard? Il faut prouver que non.

L'AIRE MINIMALE EXIGÉE ET RÉSERVÉE PAR TROU

Une idée consiste à examiner l'aire minimale de pièces carrées qu'entraîne inévitablement la présence d'un trou en prenant en compte que, d'après les règles du jeu, chaque trou doit être entièrement entouré de pièces carrées. Chaque trou de côté 1 doit par exemple être entouré de 8 carrés exactement. Certains de ces carrés pourraient être utilisés en même temps pour entourer d'autres trous; on ne peut donc pas dire que chaque trou impose au moins huit carrés. En revanche, si l'on découpe chaque pièce carrée en quatre carrés plus petits de côté $1/2$, on peut affirmer que les petits carrés de côtés $1/2$ qui bordent le trou ne pourront pas border un autre trou. Il y a 12 petits carrés de côté $1/2$ qui bordent un trou de 1 carré. Leur aire est 3 (car $12 \times 1/4 = 3$); ils forment une bande de largeur $1/2$ autour du trou, et chaque petit carré de cette bande est réservé pour le trou qu'il borde (voir l'encadré 4).

Il faut donc au moins une aire de $3n$ unités pour constituer l'ensemble des bandes autour de n trous; et bien sûr, pour cette aire de $3n$ unités, il faut au moins $3n$ pièces carrées. Pour des trous ayant une aire supérieure à 1, il faut réserver un nombre plus grand de petits carrés pour la bande le bordant, mais chaque trou exigera au moins 3 pièces carrées pour lui et donc n trous exigeront dans le meilleur des cas $3n$ carrés. Cela démontre que $f(n) \geq 3n$.

Nous savons aussi que, grâce aux formes standard, nous pouvons faire n trous avec $3n+2l+2h+1$ pièces carrées, $lh \geq n$ et $l+h$ minimal; autrement dit, $f(n) \leq 3n+2l+2h+1$. Nous pourrions conclure si nous réussissons à améliorer l'inégalité $f(n) \geq 3n$ que nous venons d'obtenir avec les bandes autour des trous.

La solution va provenir de la prise en considération du périmètre des formes. Toute forme a un pourtour, et la bande d'épaisseur $1/2$ qui suit ce pourtour n'est jamais utile pour entourer un trou. L'aire de cette bande dépend du périmètre de la forme.

On montre que cette bande a une aire au moins égale à $H+L-1$, où H et L sont la hauteur et la largeur du plus petit rectangle contenant la forme (voir l'encadré 4). Or pour faire tenir n trous qui ne se touchent pas, il faut au moins une hauteur $2h+1$ et une largeur $2l+1$ avec $hl \geq n$. L'aire de toutes les bandes d'épaisseur $1/2$ autour des trous et le long du périmètre est donc au moins égale à $3n+(2l+1)+(2h+1)-1 = 3n+2l+2h+1$, avec $lh \geq n$ et $l+h$ minimal.

La bande de largeur $1/2$ qui suit le pourtour d'une forme contenue dans un rectangle de hauteur H et de largeur L a une aire égale à