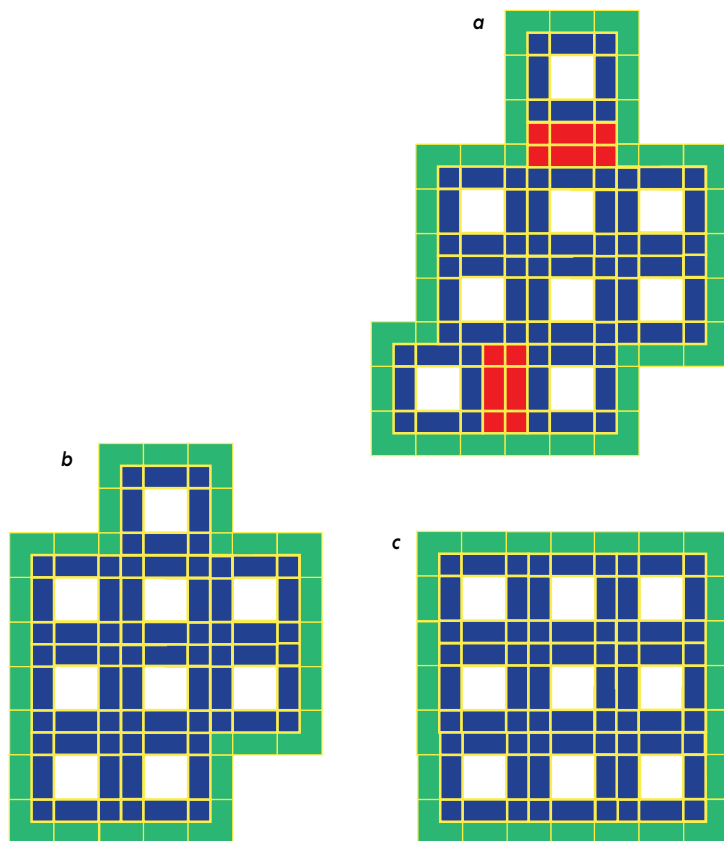




5

ESPACES PERDUS

La forme à 9 trous (a) faite de 48 carrés comporte deux espaces perdus (en rouge) qui ne sont ni la bordure d'un trou ni la bordure du périmètre.

La forme à 9 trous (b) utilise 42 carrés sans espace perdu, mais avec une mauvaise disposition des trous carrés.

La forme optimale pour 9 trous utilise 40 carrés (c) : il n'y a pas d'espace perdu et la disposition des trous est optimale.

> sont ceux correspondant aux formes les plus carrées, donc ceux où l et h sont les plus égaux possible. Ici, cela donne $l=h$, ou bien l diffère de h d'une unité. L'intuition que le carré est la meilleure façon de faire est confirmée. Une démonstration directe de cette propriété arithmétique est possible.

Exemples. Pour avoir $lh \geq 8$ avec $l+h$ minimal, il faut prendre $l=h=3$. Pour avoir $lh \geq 11$ avec $l+h$ minimal, il faut prendre $l=3$ et $h=4$ ou $l=4$ et $h=3$. Notons que, parfois, d'autres couples éloignés de plus d'une unité font aussi bien que ceux éloignés de 0 ou 1 unité (mais ils ne font pas mieux). Ainsi, pour avoir $lh \geq 10$ avec $l+h$ minimal, on trouve $l=3$ et $h=4$ ou $l=4$ et $h=3$, mais on a aussi $l=5$ et $h=2$, ou $l=2$ et $h=5$.

Où en sommes-nous de notre problème? Il semble que nous détenons la solution, mais nous ne l'avons pas démontrée, car nous avons recherché des solutions uniquement en

considérant des formes standard. N'y a-t-il pas des formes d'un autre type faisant mieux que les formes standard? Il faut prouver que non.

L'AIRE MINIMALE EXIGÉE ET RÉSERVÉE PAR TROU

Une idée consiste à examiner l'aire minimale de pièces carrées qu'entraîne inévitablement la présence d'un trou en prenant en compte que, d'après les règles du jeu, chaque trou doit être entièrement entouré de pièces carrées. Chaque trou de côté 1 doit par exemple être entouré de 8 carrés exactement. Certains de ces carrés pourraient être utilisés en même temps pour entourer d'autres trous; on ne peut donc pas dire que chaque trou impose au moins huit carrés. En revanche, si l'on découpe chaque pièce carrée en quatre carrés plus petits de côté $1/2$, on peut affirmer que les petits carrés de côté $1/2$ qui bordent le trou ne pourront pas border un autre trou. Il y a 12 petits carrés de côté $1/2$ qui bordent un trou de 1 carré. Leur aire est 3 (car $12 \times 1/4 = 3$); ils forment une bande de largeur $1/2$ autour du trou, et chaque petit carré de cette bande est réservé pour le trou qu'il borde (voir l'encadré 4).

Il faut donc au moins une aire de $3n$ unités pour constituer l'ensemble des bandes autour de n trous; et bien sûr, pour cette aire de $3n$ unités, il faut au moins $3n$ pièces carrées. Pour des trous ayant une aire supérieure à 1, il faut réserver un nombre plus grand de petits carrés pour la bande le bordant, mais chaque trou exigera au moins 3 pièces carrées pour lui et donc n trous exigeront dans le meilleur des cas $3n$ carrés. Cela démontre que $f(n) \geq 3n$.

Nous savons aussi que, grâce aux formes standard, nous pouvons faire n trous avec $3n+2l+2h+1$ pièces carrées, $lh \geq n$ et $l+h$ minimal; autrement dit, $f(n) \leq 3n+2l+2h+1$. Nous pourrions conclure si nous réussissons à améliorer l'inégalité $f(n) \geq 3n$ que nous venons d'obtenir avec les bandes autour des trous.

La solution va provenir de la prise en considération du périmètre des formes. Toute forme a un pourtour, et la bande d'épaisseur $1/2$ qui suit ce pourtour n'est jamais utile pour entourer un trou. L'aire de cette bande dépend du périmètre de la forme.

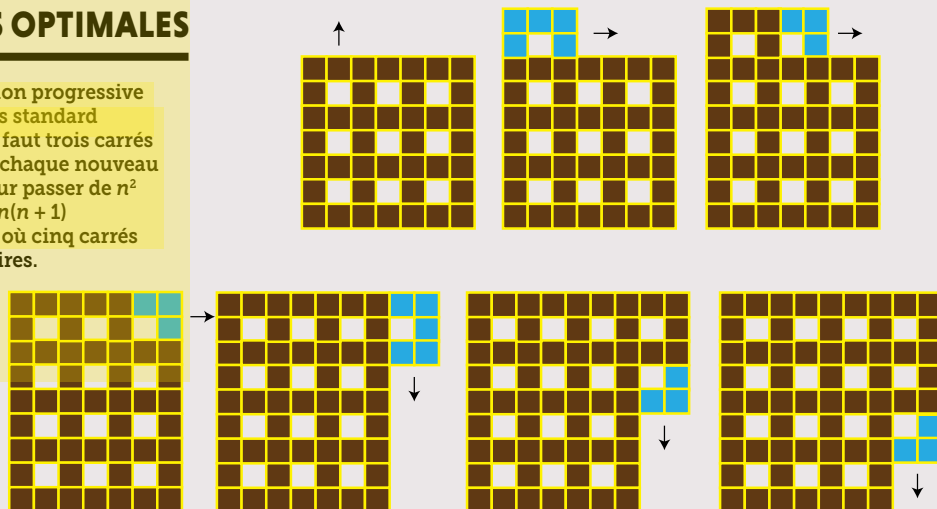
On montre que cette bande a une aire au moins égale à $H+L-1$, où H et L sont la hauteur et la largeur du plus petit rectangle contenant la forme (voir l'encadré 4). Or pour faire tenir n trous qui ne se touchent pas, il faut au moins une hauteur $2h+1$ et une largeur $2l+1$ avec $hl \geq n$. L'aire de toutes les bandes d'épaisseur $1/2$ autour des trous et le long du périmètre est donc au moins égale à $3n+(2l+1)+(2h+1)-1 = 3n+2l+2h+1$, avec $lh \geq n$ et $l+h$ minimal.

La bande de largeur $1/2$ qui suit le pourtour d'une forme contenue dans un rectangle de hauteur H et de largeur L a une aire égale à

6

FORMES OPTIMALES

Construction progressive de formes standard optimales : il faut trois carrés de plus pour chaque nouveau trou, sauf pour passer de n^2 à $n^2 + 1$ et de $n(n+1)$ à $n(n+1) + 1$, où cinq carrés sont nécessaires.



$H+L-1$ s'il n'y a pas de renforcement (figures 4b et 4c), et une aire plus grande s'il y en a (figures 4d et 4e). On démontre cette propriété en considérant l'opération consistant à enlever un coin à un rectangle.

Miracle! Nous retrouvons exactement l'expression du nombre de carrés d'une forme standard à n trous. Conclusion: on ne peut pas faire mieux qu'utiliser ce nombre de carrés, et avec les formes standard, on y arrive. Nous avons donc prouvé que $f(n) = 3n + 2l + 2h + 1$ avec $lh \geq n$ et $l+h$ minimal.

L'encadré 5 montre les diverses situations possibles quand on crée des trous et qu'on dessine les bandes d'épaisseur $1/2$. Dans le cas général, en dehors de ces bandes pour les trous et le périmètre, il y a des bouts de surface qui ne sont utilisés par aucune bande. Ces parties en rouge sur le dessin correspondent en quelque sorte à de la surface perdue. Dans le cas des figures optimales et en particulier dans le cas des formes standard, aucune surface n'est perdue: tout bout de la surface des pièces carrées est utilisé, soit pour border un trou, soit pour border le périmètre. L'intuition, acquise pendant la phase d'exploration du problème, que les formes standard les plus carrées permettent de créer n trous en utilisant un minimum de pièces carrées est démontrée! Le tâtonnement, la recherche de solutions, l'intuition géométrique et la démonstration se sont rejoints.

REMARQUES SUR LA SUITE DES NOMBRES $f(n)$

En étudiant la suite de nombres $f(n)$, on remarque que pour passer de $f(n)$ à $f(n+1)$, on ajoute toujours 3, sauf quand on passe de n^2 à n^2+1 et de $n(n+1)$ à $n(n+1)+1$, auxquels cas il faut ajouter 5.

L'encadré 6 illustre cette propriété avec la construction progressive de formes standard les plus carrées possible: partant d'un carré

pour ajouter un trou, on ne peut faire autre chose que d'utiliser 5 pièces. De même en partant d'une forme standard de $n(n+1)$ trous.

On démontre que:

- si $n = h^2$, $f(n) = 3h^2 + 4h + 1$;
- si $n = h^2 + m$ avec $0 < m \leq h$, alors

$$f(n) = 3h^2 + 4h + 3m + 3;$$

- si $n = h^2 + m$ avec $h < m \leq 2h + 1$, alors

$$f(n) = 3h^2 + 4h + 3m + 5.$$

La suite $f(n)$ figure-t-elle dans l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org/book.html>)? Oui, car... je l'ai ajoutée. C'est la suite <https://oeis.org/A319879>. Avant que je ne m'intéresse à ce problème de trous, personne en mathématiques n'avait semble-t-il rencontré cette suite numérique.

AUTRES PROBLÈMES DU MÊME TYPE

Parmi les problèmes liés à celui que nous venons de traiter ou le généralisant, mentionnons:

- la variante consistant à rechercher le nombre minimal de carrés nécessaires pour que l'aire totale des trous soit n ;
- la variante consistant à utiliser une définition plus souple de la notion de trou, sans imposer par exemple que deux trous ne se touchent pas;
- les variantes consistant à remplacer les pièces carrées par des pièces ayant la forme d'un triangle équilatéral, ou d'un hexagone régulier;
- les généralisations dans l'espace avec des cubes, ou en dimension supérieure;
- le dénombrement des solutions optimales.

Les trois premières variantes et les généralisations en dimensions supérieures se traiteront probablement de manière analogue aussi bien pour la découverte de la solution que pour sa démonstration. Le problème du dénombrement des solutions est sans doute assez difficile. ■

BIBLIOGRAPHIE

G. Villemin, **Le problème de la reine Didon**, <https://bit.ly/2VtBE7u>

Théorème isopérimétrique, Wikipédia, https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_isopérimétrique

Didon, Wikipédia, <https://fr.wikipedia.org/wiki/Didon>

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

DES BULLES ET DES CELLULES

La Société française de physique a organisé un concours d'images scientifiques. Parmi des centaines de propositions, le jury a désigné quatre lauréats.

P

lus de 360 ! C'est le nombre de candidatures reçues pour le concours « Beautiful science » organisé par la Société française de physique (SFP) à l'occasion de son 25^e congrès général qui se tiendra en juillet à Nantes. La compétition, ouverte à tous (les participants avaient de 9 à 87 ans !) et portant sur toutes les sciences, a mis en lice images, vidéos et sons sur le thème : montrer la science dans ce qu'elle a de plus beau et de plus élégant, de l'infiniment petit à l'infiniment grand.

L'événement avait pour parrain le collectif *Obvious* (Pierre Fautrel, Hugo Caselles-Dupré et Gauthier Vernier) qui s'était illustré il y a quelques mois par la vente record d'une de leurs toiles conçues par intelligence artificielle : *Le Portrait d'Edmond de Bellamy* fut adjugé à plus de 432 500 dollars chez Christie's.

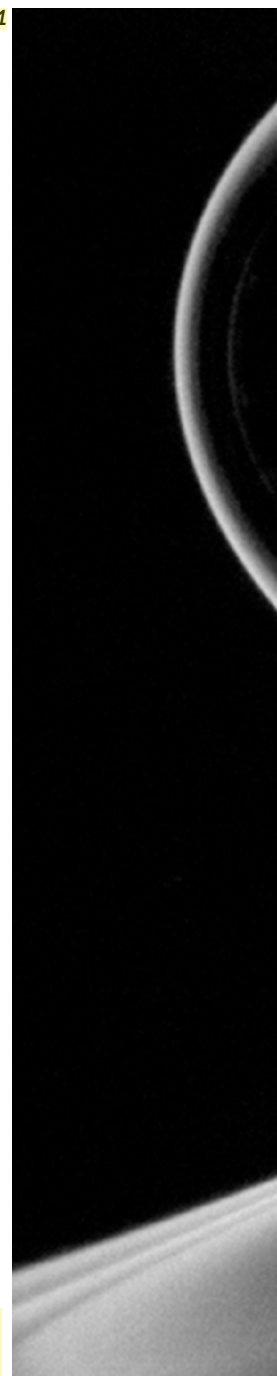
Le 28 mai, le jury s'est donc réuni et a délibéré en quelques heures pour, finalement, désigner quatre lauréats sur des critères d'esthétisme, d'originalité et d'étonnement suscité. Le premier est Antoine Lagarde, en deuxième année de thèse en mécanique des fluides, à Paris. Sa photographie, intitulée *Dans l'intimité d'une frontière franchie* (1), montre une bulle d'air qui traverse une interface séparant eau et huile.

Le deuxième prix est allé à *Îlot de cellules* (2), de Nicolas Harmand, David Pereira et Sylvie Hénou, respectivement doctorant, postdoctorant en biophysique

et professeure en microrhéologie cellulaire. Des cellules épithéliales d'un rein de chien sont cultivées sur un gel de polyacrylamide où des protéines d'adhérence sont disposées en disques de façon à contraindre la croissance cellulaire. En microscopie confocale à fluorescence, les noyaux des cellules apparaissent en bleu et les contours en jaune.

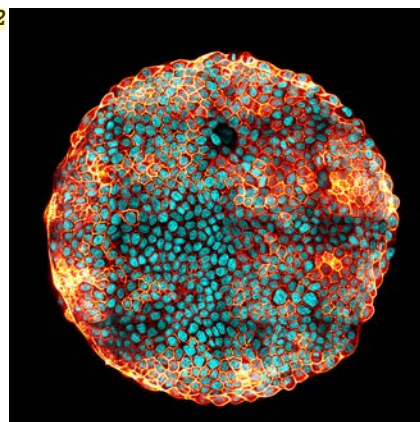
À la troisième place, deux *ex aequo*. D'abord, *Hallucination cellulaire* (3), de Martine Batailler, assistante ingénieure en neuroendocrinologie à l'Inra. Là encore, il s'agit d'une culture cellulaire, même si le

Les quatre images
lauréates du concours
Beautiful Science.

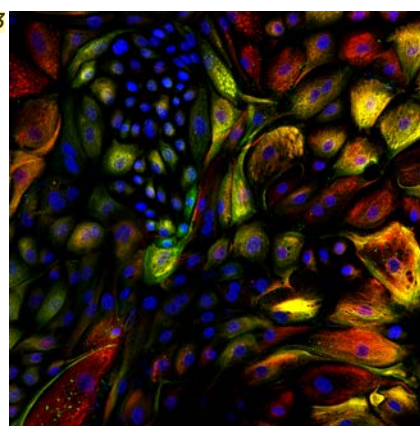




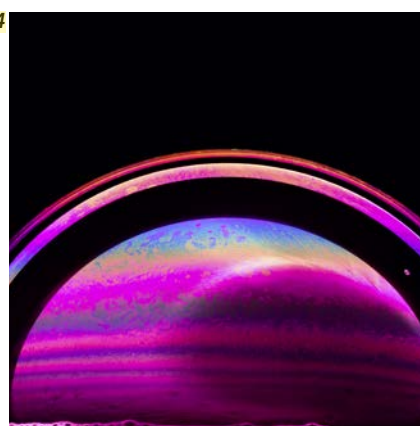
2



3



4



© A. Lagarde/N. Harmand, D. Pereira et S. Hénon/M. Baille/H. Klein

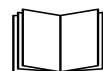
rendu est cette fois beaucoup moins ordonné. On distingue en vert et en rouge deux protéines du cytosquelette (l'armature des cellules), et en bleu le noyau des cellules après coloration de l'ADN.

Ensuite, *Planète sous cloche* (4), de Hubert Klein, maître de conférences en physique à Marseille. Par sa photographie, il met en évidence les points communs entre une bulle de savon et l'atmosphère d'une planète, notamment les phénomènes de turbulence. De fait, les tourbillons et les variations d'épaisseur (que trahissent les différentes couleurs) saisis

au sommet d'une bulle de savon évoquent les planètes gazeuses (Jupiter, Uranus, Neptune...) du Système solaire.

Les gagnants verront leurs œuvres exposées lors du congrès de la SFP à Nantes. Vous pouvez aller les voir et juger par vous-mêmes. Vous aurez alors peut-être envie de participer au prochain concours! ■

Le site du concours :
www.beautifulscience.fr
 Le site du Congrès de la SFP :
www.sfp2019.fr



L'auteur a publié :
**Pollock, Turner, Van Gogh,
 Vermeer et la science...**
 (Belin, 2018)