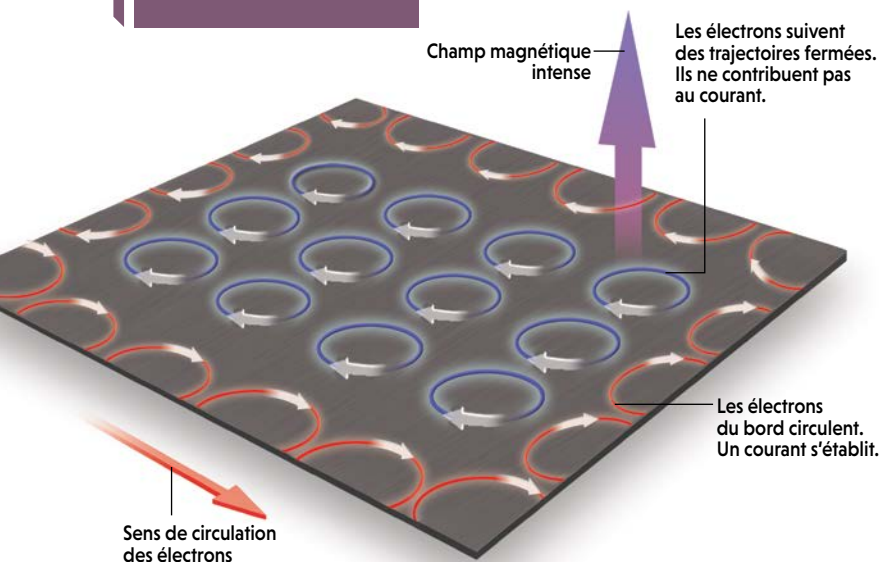


L'EFFET HALL QUANTIQUE

En 1879, le physicien américain Edwin Hall a découvert la version classique de l'effet qui porte son nom. Il a appliqué un champ électrique au matériau conducteur afin de faire circuler ses électrons, tandis que le dispositif était placé dans un champ magnétique perpendiculaire. Ce dernier exerce sur les électrons une force dite de Lorentz, qui les dévie



dans la direction orthogonale aux deux champs. Cela donne naissance à un courant et une tension électrique transverse, dont la résistance associée, dite de Hall, est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique.

En 1980, Klaus von Klitzing, au Laboratoire des champs magnétiques intenses, à Grenoble, a repris cette expérience dans des conditions particulières : le matériau, très mince et donc quasi bidimensionnel, est refroidi à une température proche du zéro absolu et soumis à un champ magnétique intense. Il a remarqué que la résistance de Hall est quantifiée : elle augmente par paliers quand on augmente l'intensité du champ magnétique. En effet, lorsque le champ magnétique est assez intense, la trajectoire des électrons se courbe assez pour se refermer. Ils sont donc localisés et ne participent pas à la conduction électrique. Ces états électroniques sont appelés « niveaux de Landau » et leur énergie est quantifiée. En revanche, les électrons du bord forment des demi-orbitales et peuvent se déplacer dans une unique direction de propagation définie par l'orientation du champ magnétique.

L'aspect remarquable de cette découverte est que la conductivité de ces états de bord est rigoureusement quantifiée et proportionnelle à un nombre (un invariant topologique), qui dépend de l'état des électrons au sein du matériau bidimensionnel et non sur le bord. Les propriétés de ce courant ont donc un caractère global. Il est alors topologiquement protégé : une impureté n'empêche pas sa circulation.

observé en partant d'un matériau semi-conducteur très plat et considéré bidimensionnel, soumis à un champ magnétique orthogonal qui impose une trajectoire courbée aux électrons. À l'intérieur du matériau 2D, les électrons sont piégés dans des trajectoires circulaires et ne contribuent pas à l'établissement d'un courant : le matériau est isolant. En revanche, sur les bords, le champ magnétique amène les électrons à suivre le bord selon un sens imposé par l'orientation du champ magnétique : le matériau est conducteur (voir l'encadré ci-dessus).

ISOLANT EN VOLUME, CONDUCTEUR EN SURFACE

On a d'abord cru que ce phénomène d'isolant en volume, mais conducteur sur les bords, était intimement associé à cette configuration particulière des trajectoires fermées pour les électrons de l'effet Hall quantique. Mais en 1988, le chercheur britannique Duncan Haldane, Prix Nobel de physique en 2016, a démontré que ce phénomène était beaucoup plus général.

Mais pourquoi tel matériau est-il conducteur, isolant ou isolant topologique ? Pour le comprendre, il faut évoquer la théorie des bandes. Dans un atome isolé, les électrons, vus comme des ondes, n'accèdent qu'à des énergies particulières, discrètes, déterminées par la

physique quantique. Dans un matériau doté d'un réseau cristallin, ces ondes interfèrent et les énergies accessibles aux électrons s'étendent à des intervalles continus, ou bandes, séparées par des domaines de valeurs d'énergie interdites aux électrons, domaines nommés bandes interdites ou « gaps ». Selon le remplissage des bandes par les électrons et la disposition des bandes, le matériau est conducteur, isolant ou semi-conducteur (voir l'encadré page 66).

À partir des années 1980, les physiciens ont constaté que le spectre d'énergie des bandes était insuffisant pour décrire tous les aspects de la conductivité, et notamment le cas des isolants topologiques. Ils ont compris que la structure des fonctions d'ondes associées aux électrons avait aussi son importance.

L'aspect topologique émerge quand on considère une grandeur, la courbure de Berry, associée à la fonction d'onde qui décrit un électron dans une bande. Le Britannique Michael Berry a introduit cette notion en 1984 pour décrire certains phénomènes quantiques. Elle est mathématiquement analogue à un champ magnétique. Or, quand on intègre la courbure de Berry sur l'ensemble des électrons dans une bande complète, on obtient une quantité que le mathématicien sino-américain Shiing-Shen Chern avait étudiée dans les ➤

➤ années 1950. Cette quantité, le « nombre de Chern », est un invariant topologique qui ne peut prendre que des valeurs entières. Elle caractérise la topologie de la bande considérée, sa courbure globale et l'existence ou non d'un vortex dans l'espace réciproque.

Un gap est dit topologique lorsque le nombre de Chern total, obtenu par l'addition des nombres de Chern des bandes sous ce gap est non nul. Dans ce cas, il existe un niveau d'énergie autorisé dans le gap. Les électrons qui occupent cet état peuvent circuler dans le matériau. Mais

physiquement, cet état propagatif est localisé uniquement à la surface du matériau. On parle de correspondance volume-surface, car la topologie des bandes (définies par les électrons dans le volume du matériau) détermine l'existence et les propriétés des états de surface.

Autre particularité de ces états : la circulation du courant en surface est unidirectionnelle ; on obtient donc un transport non réciproque. Par ailleurs, ces états sont dits protégés topologiquement : comme cette conduction unidirectionnelle est une propriété topologique, et donc

THÉORIE DES BANDES ET TOPOLOGIE

D'après les règles de la physique quantique, dans un atome isolé, les électrons occupent des niveaux d'énergie discrets. En revanche, dans le réseau cristallin d'un matériau, les valeurs possibles de l'énergie électronique s'étendent sur des intervalles continus, ou bandes, séparées par des intervalles

nommés bandes interdites, ou « gaps ».

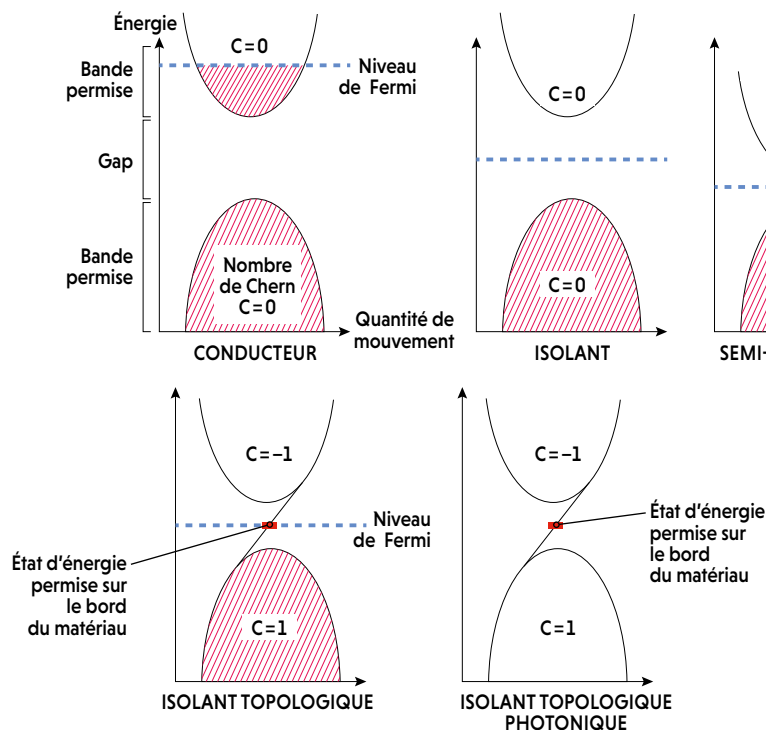
Cette structure énergétique résulte du comportement ondulatoire des électrons. En raison de la périodicité du réseau cristallin, leurs ondes interfèrent et créent cette structure de bandes. Les électrons remplissent les bandes en obéissant à certaines règles. Ce sont des fermions, ce qui implique qu'il ne peut y avoir deux électrons dans le même état quantique. Ils remplissent donc les bandes d'énergies permises en commençant par les plus basses. Ce remplissage définit le niveau de Fermi, qui correspond à peu près au niveau de plus haute énergie occupé par un électron au zéro absolu ($-273\text{ }^{\circ}\text{C}$, ou 0 kelvin).

Si le niveau de Fermi appartient à une bande permise, le matériau est conducteur, et caractérisé par un transport réciproque (pas de direction privilégiée du courant) : les électrons circulent facilement si l'on applique une tension électrique. Si le niveau de Fermi est dans une bande interdite assez large, le matériau est un isolant. Si le gap est étroit, il suffit d'apporter un peu d'énergie pour que l'électron passe dans la bande supérieure, la bande de conduction ; le matériau est alors semi-conducteur.

Dans les années 1980, les physiciens ont découvert que l'énergie des bandes n'est pas le seul critère à prendre en compte pour décrire les propriétés électroniques d'un matériau. Ils ont mis en évidence un paramètre pour

chaque bande : un invariant topologique nommé nombre de Chern qui, s'il est non nul, implique un comportement particulier du matériau, celui des isolants topologiques. Ainsi, si le niveau de Fermi est dans un gap et que les nombres de Chern sont non nuls, le matériau est isolant en volume. Mais un état d'énergie autorisé existe alors dans le gap sur le bord du matériau (à l'interface avec un isolant trivial comme l'air). On a donc un courant en surface qui est unidirectionnel et dont le sens dépend du signe de la somme des nombres de Chern des bandes situées sous le gap.

Dans un matériau photonique, les photons étant des bosons, ils ne remplissent pas les bandes comme les électrons (il n'y a pas de niveau de Fermi). Cependant, dans certaines configurations, comme dans un cristal photonique, il est possible d'avoir un comportement d'isolant en volume car un photon ne peut pas se propager à l'énergie du gap dans le volume du matériau. Et les nombres de Chern peuvent être non nuls, ce qui peut conduire à l'existence d'un état de propagation unidirectionnelle sur la surface, à l'énergie du gap.



CORRESPONDANCE DANS L'ESPACE RÉEL POUR UN ISOLANT TOPOLOGIQUE

