

> années 1950. Cette quantité, le « nombre de Chern », est un invariant topologique qui ne peut prendre que des valeurs entières. Elle caractérise la topologie de la bande considérée, sa courbure globale et l'existence ou non d'un vortex dans l'espace réciproque.

Un gap est dit topologique lorsque le nombre de Chern total, obtenu par l'addition des nombres de Chern des bandes sous ce gap est non nul. Dans ce cas, il existe un niveau d'énergie autorisé dans le gap. Les électrons qui occupent cet état peuvent circuler dans le matériau. Mais

physiquement, cet état propagatif est localisé uniquement à la surface du matériau. On parle de correspondance volume-surface, car la topologie des bandes (définies par les électrons dans le volume du matériau) détermine l'existence et les propriétés des états de surface.

Autre particularité de ces états : la circulation du courant en surface est unidirectionnelle ; on obtient donc un transport non réciproque. Par ailleurs, ces états sont dits protégés topologiquement : comme cette conduction unidirectionnelle est une propriété topologique, et donc

THÉORIE DES BANDES ET TOPOLOGIE

D'après les règles de la physique quantique, dans un atome isolé, les électrons occupent des niveaux d'énergie discrets. En revanche, dans le réseau cristallin d'un matériau, les valeurs possibles de l'énergie électronique s'étendent sur des intervalles continus, ou bandes, séparées par des intervalles

nommés bandes interdites, ou « gaps ».

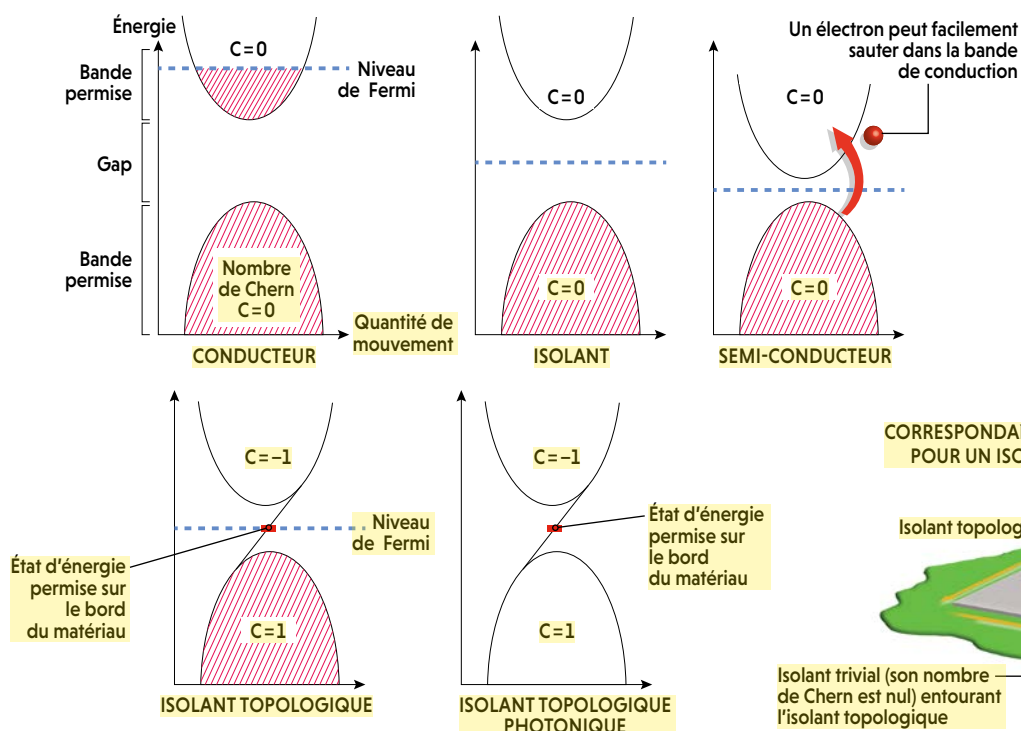
Cette structure énergétique résulte du comportement ondulatoire des électrons. En raison de la périodicité du réseau cristallin, leurs ondes interfèrent et créent cette structure de bandes. Les électrons remplissent les bandes en obéissant à certaines règles. Ce sont des fermions, ce qui implique qu'il ne peut y avoir deux électrons dans le même état quantique. Ils remplissent donc les bandes d'énergies permises en commençant par les plus basses. Ce remplissage définit le niveau de Fermi, qui correspond à peu près au niveau de plus haute énergie occupé par un électron au zéro absolu (– 273 °C, ou 0 kelvin).

Si le niveau de Fermi appartient à une bande permise, le matériau est conducteur, et caractérisé par un transport réciproque (pas de direction privilégiée du courant) : les électrons circulent facilement si l'on applique une tension électrique. Si le niveau de Fermi est dans une bande interdite assez large, le matériau est un isolant. Si le gap est étroit, il suffit d'apporter un peu d'énergie pour que l'électron passe dans la bande supérieure, la bande de conduction ; le matériau est alors semi-conducteur.

Dans les années 1980, les physiciens ont découvert que l'énergie des bandes n'est pas le seul critère à prendre en compte pour décrire les propriétés électroniques d'un matériau. Ils ont mis en évidence un paramètre pour

chaque bande : un invariant topologique nommé nombre de Chern qui, s'il est non nul, implique un comportement particulier du matériau, celui des isolants topologiques. Ainsi, si le niveau de Fermi est dans un gap et que les nombres de Chern sont non nuls, le matériau est isolant en volume. Mais un état d'énergie autorisé existe alors dans le gap sur le bord du matériau (à l'interface avec un isolant trivial comme l'air). On a donc un courant en surface qui est unidirectionnel et dont le sens dépend du signe de la somme des nombres de Chern des bandes situées sous le gap.

Dans un matériau photonique, les photons étant des bosons, ils ne remplissent pas les bandes comme les électrons (il n'y a pas de niveau de Fermi). Cependant, dans certaines configurations, comme dans un cristal photonique, il est possible d'avoir un comportement d'isolant en volume car un photon ne peut pas se propager à l'énergie du gap dans le volume du matériau. Et les nombres de Chern peuvent être non nuls, ce qui peut conduire à l'existence d'un état de propagation unidirectionnelle sur la surface, à l'énergie du gap.



L'UBIQUITÉ DE LA TOPOLOGIE

En 2005, Duncan Haldane a montré que les principes de topologie qui s'appliquent aux systèmes électroniques et photoniques sont très généraux et sont généralisables à n'importe quel type d'ondes. Aujourd'hui, des physiciens utilisent des arguments topologiques pour interpréter, par exemple, le mouvement d'ondes géophysiques équatoriales. En 2017, une équipe de l'ESPCI, à Paris, et de l'EPFL, à Lausanne, a mis en évidence des effets topologiques en étudiant des ondes acoustiques se propageant dans des réseaux faits de canettes de Coca-Cola !

globale, le courant circule sans être perturbé par des fluctuations locales telles que des défauts ou des impuretés dans le réseau cristallin. C'est la même idée que dans le superfluide, où les perturbations responsables de la viscosité du fluide sont supprimées.

Grâce à la topologie et au nombre de Chern, il a été possible de développer une description mathématique rigoureuse de l'effet Hall quantique. Et grâce à cette approche, Duncan Haldane a montré qu'il était possible d'avoir des bandes avec une courbure globale non nulle sans que les électrons suivent des trajectoires circulaires fermées – ce qu'il a nommé l'effet Hall quantique anormal.

Ainsi, pour obtenir une description complète de la conductivité d'un solide, il faut étudier les bandes électroniques et leur remplissage, mais aussi leur nombre de Chern. Ce constat a suscité de nombreux développements théoriques et expérimentaux pour trouver de nouveaux isolants topologiques.

En 2005, Charles Kane et Eugene Mele, de l'université de Pennsylvanie, aux États-Unis, ont proposé un type d'isolant topologique qui ne se manifeste pas grâce à un champ magnétique externe comme dans l'effet Hall quantique, mais qui est fondé sur le couplage spin-orbite des électrons. Cette interaction relie le mouvement de l'électron à son spin (son moment magnétique intrinsèque, que l'on peut se représenter comme une flèche qui pointe vers le haut ou vers le bas). Du fait de ce couplage, l'électron dans un solide ressent une force similaire à celle qu'il subirait en présence d'un champ magnétique et dont la direction dépend de son spin.

On obtient ainsi des états de surface correspondant à deux courants de sens opposés, en fonction de l'orientation du spin. Ces courants de spin sont topologiquement protégés ; on parle alors d'effet Hall quantique de spin. Ce nouveau type d'isolant topologique est très intéressant, car il ne nécessite pas un champ magnétique externe et apparaît davantage comme une propriété intrinsèque au matériau. L'effet Hall quantique de spin a été observé très vite après sa prédiction et fait encore aujourd'hui l'objet d'intenses recherches.

ET LES PHOTONS ?

Ces derniers isolants topologiques sont la preuve qu'il est *a priori* possible d'avoir un transport non réciproque sans faire appel à un agent extérieur tel qu'un champ électrique ou magnétique. Il ne serait donc pas obligatoire d'utiliser des particules chargées, mais ces principes sont-ils pour autant transposables aux photons ? La réponse est oui.

Une première étape a été franchie en 1988 lorsque Eli Yablonovitch, de la société Bell Communications Research, et Sajeew John, de l'université de Princeton, ont inventé les

cristaux photoniques. Ces dispositifs reposent sur une modulation périodique de l'indice de réfraction au sein du matériau. Comme pour les électrons, l'interférence des ondes électromagnétiques avec ce milieu périodique conduit à une structure de bandes d'énergies permises et de bandes interdites. Autrement dit, les photons qui se propagent dans le cristal photonique ont une énergie compatible avec les bandes permises, mais ne peuvent pas accéder aux énergies des gaps.

Deuxième étape, en 2005, Duncan Haldane a encore généralisé la portée de la physique topologique en montrant que ses concepts s'appliquaient aussi aux systèmes photoniques, et plus généralement à n'importe quel type d'onde se propageant dans un milieu. Plus précisément, il a montré que les bandes d'énergies photoniques sont caractérisées par la même courbure globale que leurs homologues électroniques, ce qui a donné naissance à la photonique topologique.

Son article a mis trois ans à être publié, ce qui témoigne de la forte opposition à laquelle il a dû faire face à l'époque. Il y a en effet plusieurs différences essentielles entre les photons et les électrons. Même si des bandes d'énergie existent pour les photons dans un cristal photonique, le concept de remplissage des bandes, lié à la nature fermionique des électrons est absent. Parce qu'ils ont un spin 1/2, demi-entier (ce qui en fait des fermions), les électrons obéissent au principe d'exclusion de Pauli selon lequel il ne peut y avoir deux électrons dans le même état quantique. Ils occupent donc différents niveaux d'énergie dans les bandes, ce qui permet de les remplir. Les photons, eux, sont des bosons (car ils ont un spin entier, égal à 1) et ne sont donc pas soumis au principe d'exclusion de Pauli. Ainsi, lorsqu'on parle d'isolant en photonique, on veut simplement dire qu'il existe un gap et que la propagation de la lumière dans le milieu est interdite aux énergies du gap.

Par ailleurs, les électrons sont chargés. Ils sont donc sensibles à un champ magnétique *via* la force de Lorentz. En appliquant un tel champ (externe ou par le couplage spin-orbite) à des électrons, leur évolution n'est plus symétrique si l'on inverse le sens d'écoulement du temps. Or, au niveau le plus fondamental, c'est la brisure de la symétrie temporelle (peu importe son origine) qui donne un nombre de Chern non nul.

Si une telle brisure de symétrie n'est pas évidente *a priori* pour les photons, il faut noter que l'onde électromagnétique associée aux photons présente une polarisation (linéaire, circulaire, etc.), qui caractérise la direction dans laquelle son champ électrique oscille au cours de sa propagation. Dans certains cas, il est possible d'associer à la polarisation une courbure de Berry non nulle (et donc un nombre de Chern non nul). Pour y parvenir, il faut utiliser des matériaux ➤