

DE LA TOPOLOGIE AUX NOMBRES DE CHERN

La topologie est la partie des mathématiques qui s'intéresse aux caractéristiques globales de la géométrie des objets. Les invariants topologiques sont des nombres entiers ou demi-entiers correspondant à ces caractéristiques. Pour un solide en 3D, l'invariant le plus connu est le « genre », qui décrit le nombre de trous que présente sa surface. Le genre (une propriété globale de l'objet) est calculé à partir de l'intégrale de la courbure, définie localement en chaque point de la surface.

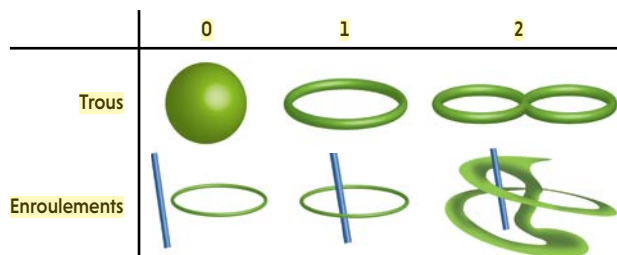
Un ballon de rugby et un ballon de football sont géométriquement distincts, mais leur genre est le même et ils sont topologiquement équivalents. On peut déformer continûment l'un en l'autre sans créer de trous dans la surface. Pour des courbes, on peut définir le nombre d'enroulements (combien de fois cette courbe enlance

un objet), qui se calcule avec l'intégrale de l'angle polaire du point qui se déplace le long de la courbe. On constate que les invariants sont en général les intégrales des propriétés locales (courbure, angle polaire), et ces intégrales conservent uniquement les informations sur les propriétés globales des systèmes.

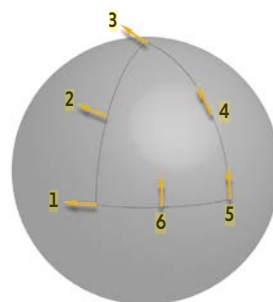
Le théorème de Gauss-Bonnet est fondamental en topologie, car il relie de façon très générale les propriétés locales d'un objet à l'une de ses propriétés globales. Par exemple, l'intégrale, sur toute la surface Σ d'un objet, de sa courbure locale F (intégrée sur tous les éléments de surface dS) est reliée au genre ν (le nombre de trous de l'objet). Or si l'on déforme la surface de l'objet, le genre reste, lui, inchangé.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} F dS = 2(1-\nu)$$

En physique de la matière condensée, les outils de la topologie ne s'appliquent pas à l'objet physique mais à la structure des bandes d'énergie accessibles aux particules mobiles dans ce matériau. On définit d'abord la courbure de Berry. Pour comprendre ce paramètre, une analogie est celui du transport parallèle d'un vecteur sur une surface



La topologie classe les objets selon le nombre de trous ou d'enroulements qu'ils exhibent, des propriétés invariantes lorsque l'objet est déformé de façon continue.



Dans le transport parallèle sur une sphère, on constate qu'un vecteur que l'on fait glisser de l'équateur (1), vers le pôle nord (3) puis de nouveau vers l'équateur (5) en passant par un autre méridien et en gardant le même angle avec chaque branche de son trajet, a subi une rotation en revenant au point de départ (6).

courbe. En évoluant sur un circuit fermé en respectant certaines contraintes sur son orientation, le vecteur final et le vecteur initial ne pointent pas dans la même direction. Le transport parallèle sur la surface courbe a induit l'apparition d'un angle entre les deux vecteurs (voir ci-dessus). De la même façon, on peut assimiler à un vecteur la fonction d'onde qui décrit un électron dans

une bande. On peut associer une courbure, la courbure de Berry, au changement d'orientation de ce vecteur lorsqu'un électron se déplace dans l'espace réciproque des impulsions. En intégrant cette courbure sur une bande complète, on applique le théorème de Gauss-Bonnet et on obtient un invariant topologique, le nombre de Chern, qui caractérise la topologie de la bande.

> gyromagnétiques, qui ont la particularité d'avoir un indice optique différent pour les polarisations circulaires droite et gauche de la lumière.

Ainsi, dans un cristal photonique fait de matériaux gyromagnétiques, le gap photonique peut être associé à un nombre de Chern non nul. En 2009, le groupe de Marin Soljačić, au MIT (l'institut de technologie du Massachusetts) a confirmé expérimentalement cette prédiction théorique. Le problème est que les matériaux ayant une activité gyromagnétique fonctionnent typiquement dans le domaine fréquentiel des microondes, très loin des fréquences optiques qui sont celles généralement utilisées pour transporter l'information.

La piste des isolants topologiques liés à l'effet Hall quantique de spin a aussi été explorée. Ceux-ci ont l'avantage de fonctionner sans champ magnétique. Il faut cependant définir un équivalent du spin de l'électron pour le photon : comme la polarisation de la lumière peut toujours être décomposée en deux composantes linéaires (souvent nommées « horizontale » et

« verticale »), on obtient une description de l'onde électromagnétique comme un système à deux niveaux associés à un pseudo-spin.

En 2011, Mohammad Hafezi et ses collègues, de l'université du Maryland, aux États-Unis, se sont inspirés de cette idée de pseudo-spin pour proposer une autre solution. Ils ont construit un réseau photonique périodique constitué de résonateurs optiques circulaires (des guides d'onde où la lumière s'accumule par interférences constructives) dans du silicium. Chaque résonateur a deux états différents, selon le sens dans lequel circule la lumière, et que l'on identifie aux états d'un pseudo-spin. Le défaut de cette approche est que la protection topologique du sens de propagation n'est pas totale, car on n'a pas un vrai spin comme pour un électron. Pour ce dernier, la direction du spin, qui définit le sens de propagation, ne peut être inversée. Mais avec le pseudo-spin du photon, l'inversion reste possible.

D'autres importantes avancées sont fondées sur le potentiel des quasiparticules mixtes