

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique et calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

LES INTRIGANTS CHEMINS DE LA FOURMI DE LANGTON

Elle va et vient et occupe petit à petit une zone infinie du plan: la fourmi automatique de Langton décrit des trajectoires dont la complexité ne livre que lentement ses secrets.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)

Une compétition permanente se déroule entre chercheurs en mathématiques et en informatique: il s'agit de trouver des systèmes de règles aussi simples que possible engendrant de la complexité et de l'imprévisible. D'étonnantes découvertes sont régulièrement proposées et il faut souvent des années pour comprendre ces situations définies par quelques mots!

La «fourmi de Langton» est l'un de ces systèmes mystérieux. On l'étudie depuis plus de trente ans. D'année en année, on comprend mieux la complexité qu'elle engendre à partir de presque rien, mais la conjecture la plus simple la concernant reste non résolue.

Cet objet a été défini en 1986 par Christopher Langton, qui était alors chercheur en informatique à l'université du Michigan à Ann Arbor. Il s'intéressait à ce qui, en informatique, peut simuler la vie et il participa à la création du domaine de recherche dénommé «vie artificielle». Voici la définition de sa fourmi:

«Sur un plan recouvert d'un quadrillage de cases blanches ou noires se déplace une flèche, la fourmi, qui prend l'orientation nord, sud, ouest, ou est. Si elle est sur une case blanche, elle tourne de 90° vers la droite, si elle est sur une case noire elle tourne de 90° vers la gauche. Ensuite, elle change la couleur de la case et avance d'une case dans la direction qu'elle indique, puis recommence. »

L'encadré 1 montre ce que donne cette règle sur un plan composé de cases blanches. Elle emprunte un trajet tortueux en laissant temporairement derrière elle des traces de son passage (puisque'elle change la couleur des cases par où elle passe). Elle repasse souvent là où

elle est déjà passée, et donc son comportement dépend en partie de son propre passé.

Son trajet est doublement surprenant. Aux étapes 97, 185 et 369, le dessin des cases présente un centre de symétrie. Pourquoi? On ne sait pas l'expliquer clairement. Voyant cela, on aurait pu s'attendre à ce que, régulièrement, une configuration symétrique réapparaisse. Ce n'est pas le cas, et après l'étape 400 une confusion totale semble s'emparer des mouvements de la fourmi: celle-ci dessine sur le plan un motif d'apparence aléatoire de plus en plus grand. Cette phase désordonnée se prolonge environ sur 10 000 étapes. Puis soudain, et c'est la seconde surprise, elle adopte un comportement répétitif décrivant un parcours complexe enroulé sur lui-même et se décalant d'une case en diagonale toutes les 104 étapes. Elle part à l'infini en laissant une trace assez large derrière elle, trace dénommée «l'autoroute». La suite est alors prévisible: du désordre est né, sans raison apparente, une structure ordonnée qui croît indéfiniment et régulièrement.

Vous pouvez mener vos propres expériences avec des logiciels disponibles sur Internet (*voir la bibliographie*). Vous remarquerez alors que, même si le plan comporte au départ des cases noires en nombre fini, et même s'il y en a beaucoup, alors, sans exception, la fourmi se met au bout d'un certain temps à construire une autoroute ayant la même forme que celle obtenue à partir du plan entièrement blanc. Seule la direction diagonale de l'autoroute change; elle peut être NO, NE, SE ou SO. J'ai essayé un très grand nombre de configurations de départ et d'autres en ont essayé encore plus: il ne se produit jamais autre chose que l'apparition de l'autoroute.



Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

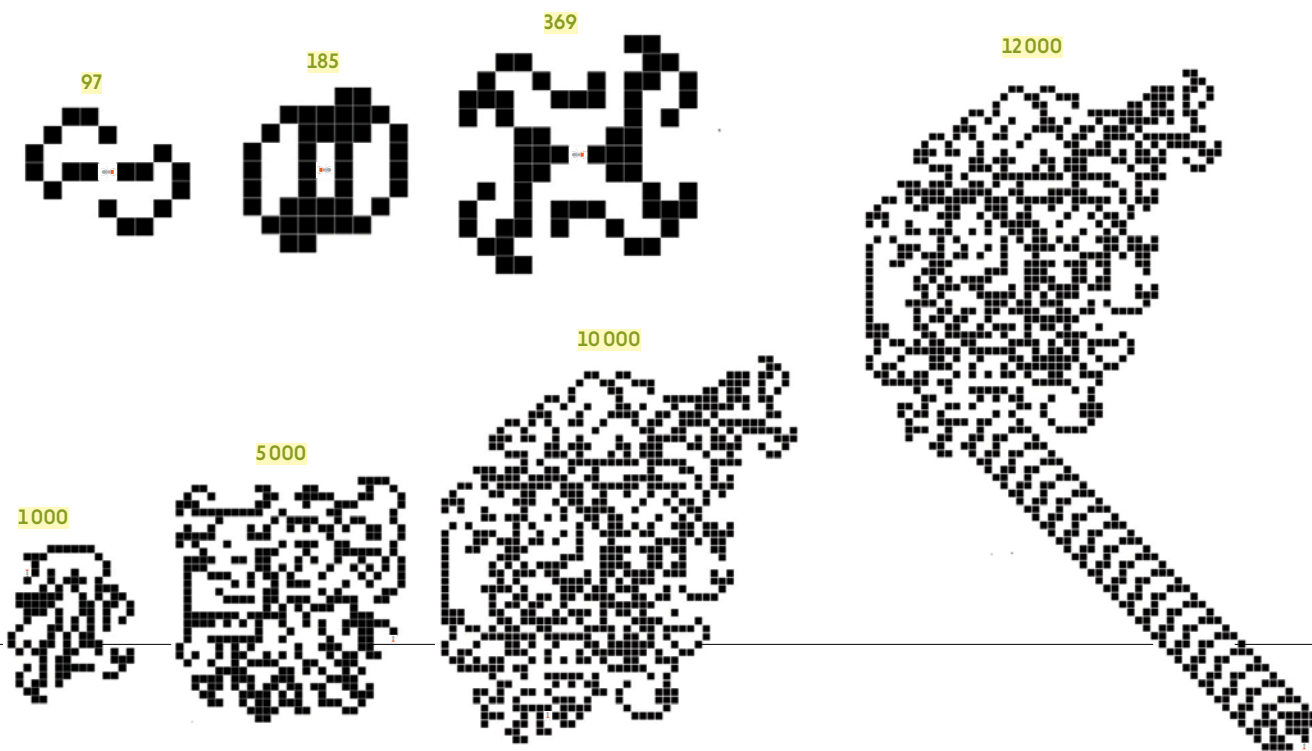
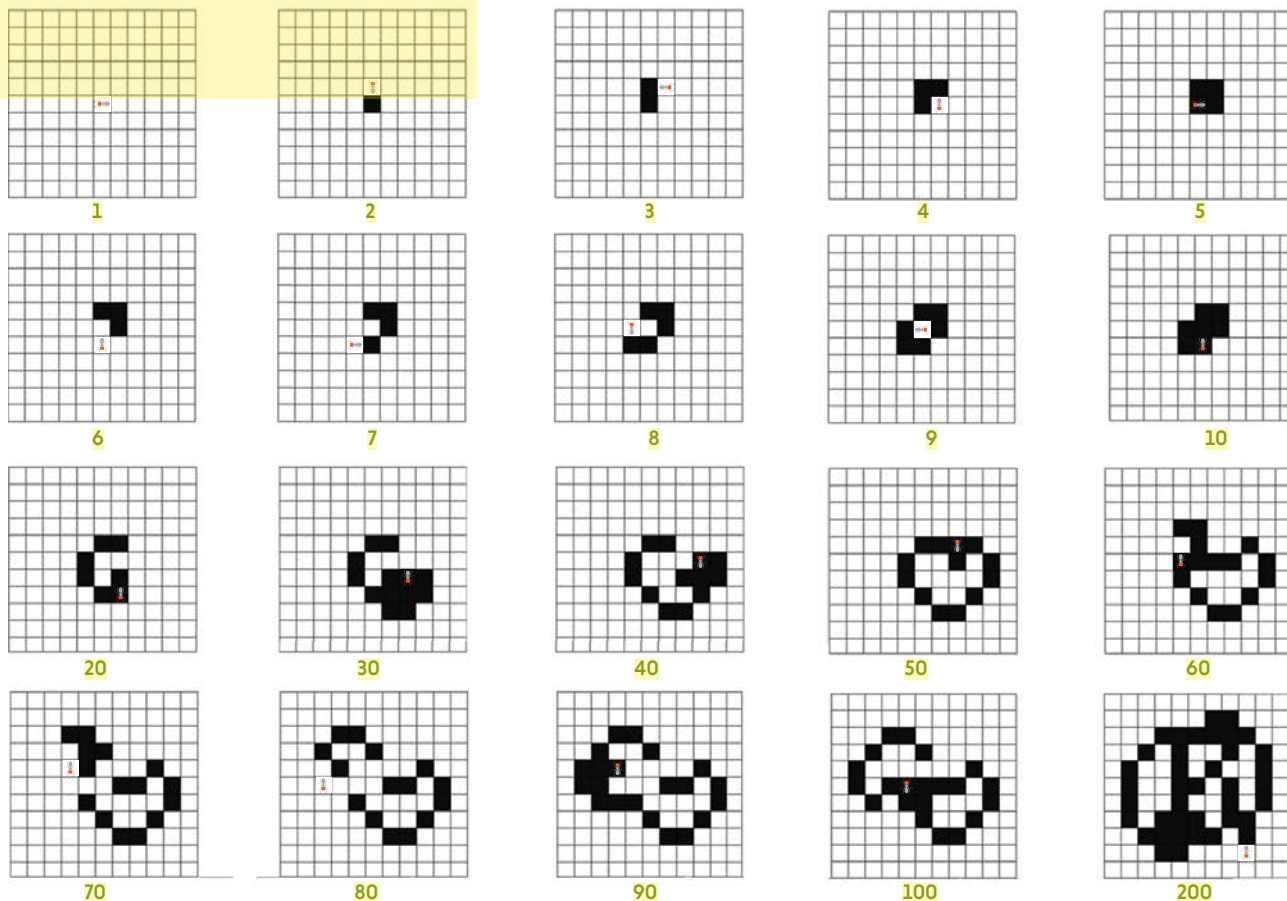
1

UN TRAVAIL DE FOURMI



La fourmi de Langton se déplace sur un damier de cases blanches ou noires. Quand elle est sur une case blanche, elle tourne de 90° vers la droite et avance d'une case. Quand elle est sur une case noire, elle tourne de 90° vers la gauche et avance d'une case. Quand elle quitte une case, elle en change la couleur.

Son cheminement quand elle démarre sur un plan tout blanc est donné ci-dessous. Aux étapes 97, 185 et 360, les dessins des cases noires ont un centre de symétrie. Après un comportement complexe pendant 10 102 étapes, elle avance en diagonale de façon répétitive par cycles de 104 étapes : c'est « l'autoroute ».



➤ On aurait pu observer un comportement périodique, ou d'autres formes de croissances infinies régulières, ou tout simplement un trajet d'apparence aléatoire non répétitif laissant progressivement des traces sur une partie non bornée du plan ou même sur tout le plan. Pourquoi n'est-ce pas le cas ?

On formule une conjecture : « Quelle que soit la configuration initiale comportant un nombre fini de cases noires sur le plan, la fourmi de Langton se met, au bout d'un temps fini, à construire l'autoroute et part alors vers l'infini. » La question, posée depuis plus de trente ans, reste sans réponse.

ET S'IL Y A PLUSIEURS FOURMIS ?

On a cependant obtenu un résultat qui exclue un devenir périodique : « Quelle que soit la configuration finie ou infinie de cases noires sur le plan au départ, la fourmi de Langton emprunte un trajet passant par une infinité de cases du plan et n'adopte donc jamais un comportement périodique ». L'encadré 2 en donne l'astucieuse démonstration.

S'il y a plusieurs fourmis de Langton, tout change. Avec seulement deux fourmis posées sur un plan tout blanc, on peut avoir une situation périodique. La figure a de l'encadré 3 montre ce que donnent deux fourmis côte à côte, toutes deux tournées vers la droite sur une même ligne verticale. Au bout de 14 étapes, elles reviennent dans la même position, mais toutes deux tournées vers la gauche. Encore 14 étapes et elles sont revenues dans leur position initiale, cette fois avec la même orientation qu'au départ. Tout recommence donc indéfiniment : la configuration est périodique.

Le déroulement des trajets de ces deux fourmis illustre la capacité de ces fourmis à repasser à l'envers sur leurs traces en effaçant tout de leur passage : les dessins complexes laissés par les deux fourmis ont été effacés par elles-mêmes quand elles reviennent sur leurs traces.

L'explication de ces capacités à effacer ce qu'elles font provient de la réversibilité de la règle qui définit la fourmi. Si, par exemple, dans le cas d'une fourmi, vous l'arrêtez au bout de n étapes, inversez son orientation et la faites

2

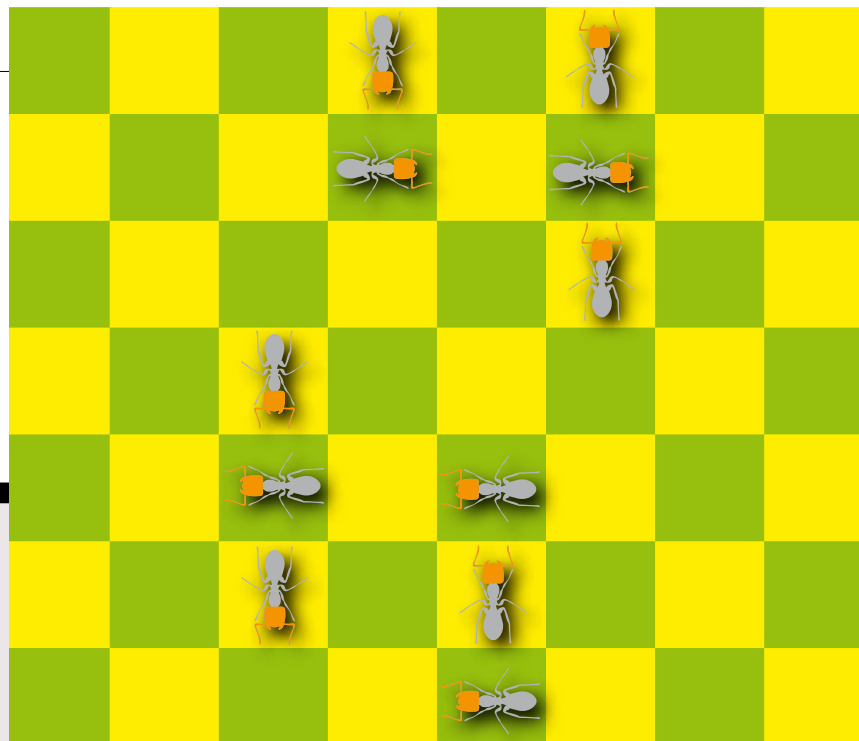
UNE FOURMI SEULE VA NÉCESSAIREMENT À L'INFINI

Leonid Bunimovich et Serge Troubetzkoy ont établi en 1992 un joli résultat : la fourmi de Langton ne peut pas avoir un comportement périodique.

Théorème. Quelle que soit la configuration initiale de cases noires et blanches, la fourmi de Langton visite un espace infini.

Démonstration. Colorions l'espace avec un damier vert et jaune. À chaque fois que la fourmi sort d'une case verte, elle entre dans une case jaune et réciproquement, et elle change sa direction d'horizontale en verticale, ou l'inverse. Il en résulte que si, au départ, la fourmi est placée horizontalement sur une case verte, elle sera toujours placée horizontalement sur les cases vertes et verticalement sur les cases jaunes.

Supposons que la fourmi ne visite qu'un espace borné. Parmi les cases visitées un nombre infini de fois, certaines sont situées le plus à gauche possible. Parmi celles-ci, il en existe une,



notons-la C, qui est la plus haute possible. Examinons-la. Supposons-la coloriée en vert. La fourmi entre dans cette case par la droite ou par la gauche. Puisque la case à gauche n'est visitée qu'un nombre fini de fois, au-delà d'un certain temps la fourmi n'entre dans cette case que par la droite. Une fois sur deux, elle ressort dans la case immédiatement au-dessus d'elle, qui serait donc une case visitée une infinité de fois. Or c'est impossible, car la case C a été choisie la plus haute possible parmi

celles visitées une infinité de fois et situées le plus à gauche possible.

On a supposé que C était verte, mais un raisonnement analogue s'applique quand C est jaune.

On a ainsi une contradiction, et la fourmi visite donc un espace non borné. **Généralisation.** Le raisonnement reste valable si l'on considère des turmites, objets similaires à la fourmi de Langton, mais avec des cases à n états parcourus cycliquement, chaque état étant associé à un changement de direction $+90^\circ$ ou -90° .