

- > On aurait pu observer un comportement périodique, ou d'autres formes de croissances infinies régulières, ou tout simplement un trajet d'apparence aléatoire non répétitif laissant progressivement des traces sur une partie non bornée du plan ou même sur tout le plan. Pourquoi n'est-ce pas le cas ?

On formule une conjecture : « Quelle que soit la configuration initiale comportant un nombre fini de cases noires sur le plan, la fourmi de Langton se met, au bout d'un temps fini, à construire l'autoroute et part alors vers l'infini. » La question, posée depuis plus de trente ans, reste sans réponse.

ET S'IL Y A PLUSIEURS FOURMIS ?

On a cependant obtenu un résultat qui exclue un devenir périodique : « Quelle que soit la configuration finie ou infinie de cases noires sur le plan au départ, la fourmi de Langton emprunte un trajet passant par une infinité de cases du plan et n'adopte donc jamais un comportement périodique ». L'encadré 2 en donne l'astucieuse démonstration.

S'il y a plusieurs fourmis de Langton, tout change. Avec seulement deux fourmis posées sur un plan tout blanc, on peut avoir une situation périodique. La figure *a* de l'encadré 3 montre ce que donnent deux fourmis côte à côte, toutes deux tournées vers la droite sur une même ligne verticale. Au bout de 14 étapes, elles reviennent dans la même position, mais toutes deux tournées vers la gauche. Encore 14 étapes et elles sont revenues dans leur position initiale, cette fois avec la même orientation qu'au départ. Tout recommence donc indéfiniment : la configuration est périodique.

Le déroulement des trajets de ces deux fourmis illustre la capacité de ces fourmis à repasser à l'envers sur leurs traces en effaçant tout de leur passage : les dessins complexes laissés par les deux fourmis ont été effacés par elles-mêmes quand elles reviennent sur leurs traces.

L'explication de ces capacités à effacer ce qu'elles font provient de la réversibilité de la règle qui définit la fourmi. Si, par exemple, dans le cas d'une fourmi, vous l'arrêtez au bout de n étapes, inversez son orientation et la faites

2

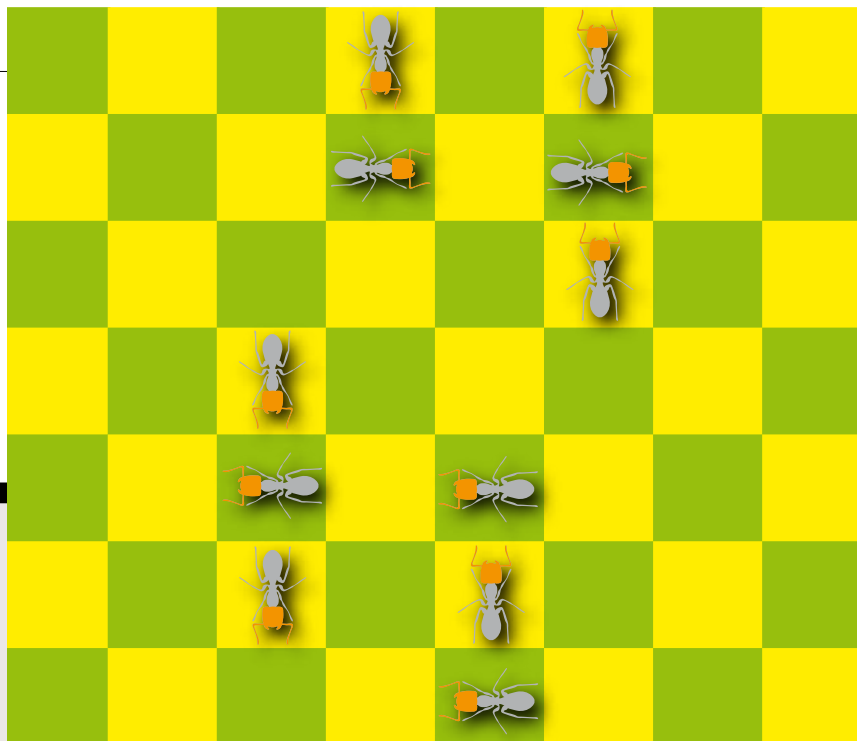
UNE FOURMI SEULE VA NÉCESSAIREMENT À L'INFINI

Leonid Bunimovich et Serge Troubetzkoy ont établi en 1992 un joli résultat : la fourmi de Langton ne peut pas avoir un comportement périodique.

Théorème. Quelle que soit la configuration initiale de cases noires et blanches, la fourmi de Langton visite un espace infini.

Démonstration. Colorions l'espace avec un damier vert et jaune. À chaque fois que la fourmi sort d'une case verte, elle entre dans une case jaune et réciproquement, et elle change sa direction d'horizontale en verticale, ou l'inverse. Il en résulte que si, au départ, la fourmi est placée horizontalement sur une case verte, elle sera toujours placée horizontalement sur les cases vertes et verticalement sur les cases jaunes.

Supposons que la fourmi ne visite qu'un espace borné. Parmi les cases visitées un nombre infini de fois, certaines sont situées le plus à gauche possible. Parmi celles-ci, il en existe une,



notons-la *C*, qui est la plus haute possible. Examinons-la. Supposons-la coloriée en vert. La fourmi entre dans cette case par la droite ou par la gauche. Puisque la case à gauche n'est visitée qu'un nombre fini de fois, au-delà d'un certain temps la fourmi n'entre dans cette case que par la droite. Une fois sur deux, elle ressort dans la case immédiatement au-dessus d'elle, qui serait donc une case visitée une infinité de fois. Or c'est impossible, car la case *C* a été choisie la plus haute possible parmi

celles visitées une infinité de fois et situées le plus à gauche possible.

On a supposé que *C* était verte, mais un raisonnement analogue s'applique quand *C* est jaune.

On a ainsi une contradiction, et la fourmi visite donc un espace non borné. **Généralisation.** Le raisonnement reste valable si l'on considère des turmites, objets similaires à la fourmi de Langton, mais avec des cases à n états parcourus cycliquement, chaque état étant associé à un changement de direction $+90^\circ$ ou -90° .