

repartir, elle empruntera un trajet exactement inverse de celui emprunté jusqu'à l'étape n , et cela quelle que soit la complexité apparente des traces laissées, lesquelles disparaîtront progressivement comme si la fourmi avait mémorisé son trajet.

À l'exception de ces situations périodiques, on aurait pu penser que, généralisant le cas d'une unique fourmi, le devenir de toute configuration de n fourmis serait une partie centrale de cases noires avec n autoroutes s'en échappant. On constate effectivement très souvent ce type de situations (voir l'encadré 3, b). La conjecture qui affirmerait: «Avec n fourmis sur un plan initialement occupé par un nombre fini de cases noires, tout se termine par n autoroutes ou une situation périodique» est fautive. En effet, d'autres croissances infinies sont possibles, comme le montre le dessin c de l'encadré 3 où un carré croissant indéfiniment est engendré par deux fourmis qui tournent en une danse infinie. Une infinité d'autres évolutions illimitées différentes de n autoroutes ou du schéma du carré croissant sont possibles, et savoir ce que donnent n fourmis semble impossible autrement qu'en regardant ce qu'elles font.

Notons qu'avec plusieurs fourmis, il faut prévoir le cas où deux fourmis se retrouvent sur la même case au même instant. Une solution consiste à convenir d'un ordre entre les fourmis – elles avancent à tour de rôle selon un schéma périodique fixé – et à admettre qu'elles puissent se trouver à plusieurs sur une même case au même instant sans se gêner. Cette solution est peu satisfaisante, car il faut admettre que 1000 fourmis ou plus pourraient occuper la même case, ce qui est peu réaliste. Une autre solution est de considérer que toutes les fourmis bougent en même temps mais que, lorsque plusieurs arrivent sur une même case, elles s'entre-tuent et disparaissent. Le logiciel Golly choisit cette seconde solution.

Si toutes les fourmis (de même orientation au départ) sont sur les cases vertes d'un damier jaune et vert, le raisonnement de l'encadré 2 s'applique. Il ne peut donc pas y avoir d'évolution périodique dans ce cas. Deux devenirs restent possibles: ou bien cela se bloque, car les fourmis se détruisent mutuellement et il finit par ne plus y en avoir aucune (c'est le cas pour deux fourmis placées sur une même ligne, séparées d'une case et tournées vers le haut), ou bien la configuration part à l'infini (c'est le cas pour deux fourmis sur une même ligne, séparées de 17 cases et tournées vers le haut). En revanche, si certaines des fourmis (de même orientation initiale) sont sur des cases vertes et d'autres sur des cases jaunes, alors une évolution périodique est possible.

Les turmites sont des fourmis de Langton qui se déplacent sur un plan non plus fait de cases blanches ou noires, mais sur un plan occupé par des cases de n couleurs différentes >

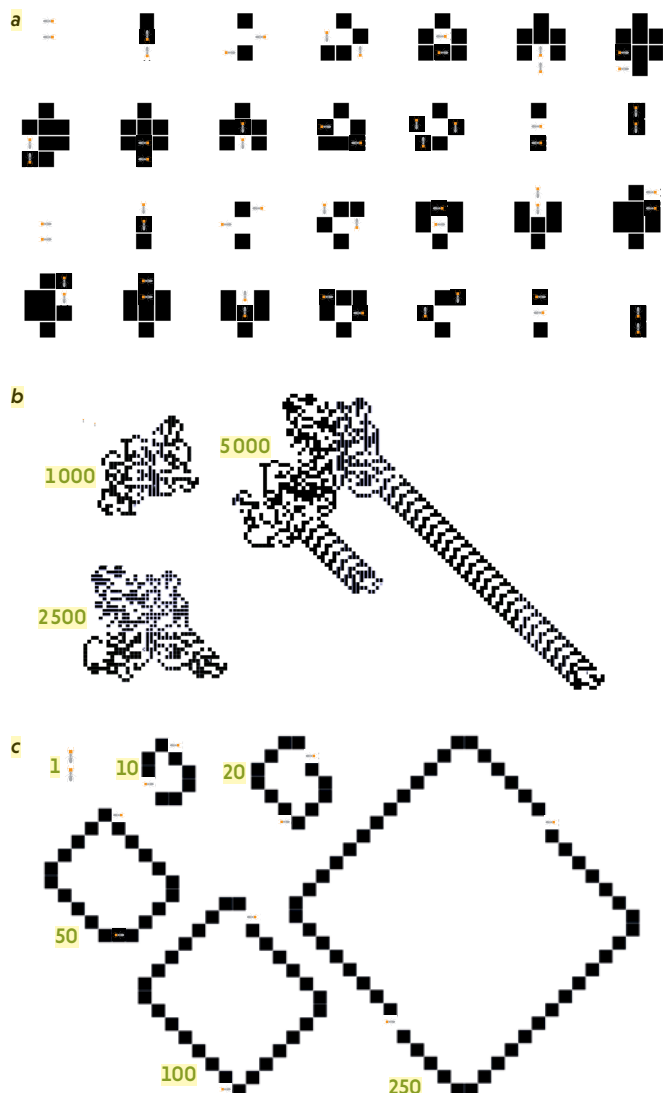
3

AVEC PLUSIEURS FOURMIS

Tout se complique lorsqu'il y a plus d'une fourmi de Langton. Il apparaît notamment des cycles. En a sont indiquées les 28 étapes qu'empruntent cycliquement deux fourmis placées initialement côte à côte sur un plan blanc.

Parfois, chaque fourmi construit son autoroute. Ainsi, en b, deux fourmis, après une période confuse, construisent chacune leur autoroute.

On est alors tenté de généraliser et de conjecturer que plusieurs fourmis donnent soit un cycle, soit plusieurs autoroutes. Cette conjecture est hélas fautive : des croissances infinies autres que l'autoroute apparaissent. La création d'un carré qui grandit indéfiniment en laissant son intérieur vide est l'un de ces comportements infinis non répétitifs (c).



DE L'ART AUTOMATIQUE

4

Une **turmite** est une **fourmi sur un plan** où, au lieu de noir et blanc, il y a n couleurs possibles (par exemple quatre), auxquelles sont associées n rotations (par exemple $+90^\circ$, $+90^\circ$, -90° , -90° , auquel cas la turmite est notée 1100). Les turmites dont le code des rotations ne comporte que des doubles 0 et des doubles 1 (par exemple 1100, 111100, 00110011, etc.) ont l'extraordinaire propriété de produire régulièrement des dessins symétriques.

La figure a montre quelques-unes de ces étapes symétriques pour la turmite 1100. Les turmites donnent naissance à des dynamiques très différentes et produisent des dessins étonnants que l'on peut voir comme un art automatique imprévisible... Les images proposées ont été réalisées avec un programme de Dean Tersigni (voir www.thealmightyguru.com/Wiki/index.php?title=Langton%27s_ant).

$C_1, C_2, \dots, C_n$, chaque couleur étant associée à un changement de direction $+90^\circ$ ou -90° . On choisit par exemple quatre couleurs C_1, C_2, C_3, C_4 et les changements de direction $+90^\circ, +90^\circ, -90^\circ$ et -90° . De cette suite, on tire le nom de la turmite, ici 1100. Quand la turmite est sur la case C_i , elle change sa couleur en C_{i+1} (on convient que C_n donne C_1), change de direction selon le i -ième élément de son nom et avance.

DES TURMITES POUR PLUS DE DEUX COULEURS

Le raisonnement de l'encadré 2 s'applique et l'on est donc en présence d'une variante de la fourmi de Langton qui occupe progressivement une infinité de cases. Ici, elle occupe tout l'espace (voir l'encadré 4). Ces turmites présentent une multitude de comportements étranges et tout aussi difficiles à comprendre que la fourmi de base, qui est la turmite 10.

Un comportement extraordinaire a été noté pour la turmite 1100: régulièrement, elle dessine une configuration dotée d'un axe de symétrie (voir l'encadré 4, a). Une explication mathématique de ce phénomène ahurissant a été trouvée. La démonstration de ce comportement a été publiée en 1995 par David Gale et trois autres chercheurs (voir la bibliographie). Le raisonnement occupe une dizaine de pages et prouve un résultat plus général: toute turmite dont le nom lu cycliquement (après la dernière «lettre», on revient à la première) n'est fait que de 0 ou de 1 répétés un nombre pair de fois (par exemple 1100, 0011001111, 10011001, 011110) crée une infinité de fois un dessin symétrique.

La fascination suscitée par la fourmi de Langton et ses variantes a amené des mathématiciens et informaticiens à travailler assidûment sur le sujet. Ils ont formé des groupes d'étude spécialement dédiés et un extraordinaire résultat a alors été obtenu en 2001 qui constitue une explication indirecte de la complexité des dynamiques observées.

LA COMPLEXITÉ DE LA FOURMI

Anahi Gajardo, Andrés Moreira et Eric Goles, de l'université du Chili, à Santiago, ont démontré que la fourmi de Langton a un pouvoir de calcul universel. Pour leur résultat, une seule fourmi est utilisée. Expliquons ce que signifie cette «universalité».

Un système dynamique est dit universel s'il existe, pour toute fonction $f(n)$ calculable par algorithme (par exemple $n \rightarrow n^2$, $n \rightarrow n$ -ième nombre premier, $n \rightarrow n$ -ième décimale de π , etc.), une configuration initiale du système qui conduit le système à calculer $f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$, ces valeurs étant écrites dans les états du système selon une convention fixée. Pour la fourmi de Langton, les résultats des calculs seront inscrits en utilisant des cases noires du plan où elle circule.

