Le «jeu de la vie» de John Conway, un célèbre système discret simple étudié depuis 1970, a été démontré universel. On a par exemple construit des configurations du jeu de la vie qui calculent la suite des nombres premiers, ou même qui définissent des machines de Turing quelconques, ce qui est un moyen efficace de démontrer qu'un système est universel.

Pour la fourmi de Langton, le problème se présentait assez mal à cause de la conjecture non démontrée que toute configuration finie du plan conduit la fourmi de Langton à construire une autoroute. Si la conjecture est vraie, alors il est impossible, en déposant un nombre fini de cellules noires sur le plan et une fourmi, de lancer une évolution calculant une infinité de valeurs $f(0), f(1), ..., f(n), ...$ car quand la fourmi se met à construire l'autoroute le calcul devient répétitif et est donc interrompu (sauf pour des fonctions f très simples).

La méthode des trois chercheurs de Santiago du Chili contourne l'apparente impossibilité d'une façon astucieuse dont le principe tient en trois points.

(1) Ils ont d'abord conçu des configurations finies de cases noires qui, quand on y dépose une fourmi, évoluent de manière à calculer une fonction booléenne, quelle qu'elle soit. Une fonction booléenne, par exemple $((a \text{ ou } b) \text{ et non-}c)$, selon les affirmations vraies ou fausses que l'on met à la place de a, b et c, indique si l'affirmation complexe $((a \text{ ou } b) \text{ et non-}c)$ est vraie ou fausse.

Si l'on prend pour a «2+1=3», pour b «Paris est au Maroc», et pour c «le tabac est bon pour la santé», alors (a ou b) est vrai (car a est vrai), non-c est vrai, et donc $((a \text{ ou } b) \text{ et non-}c)$ est vraie.

À toute fonction booléenne $g(a, b, c...)$, les chercheurs chiliens associent une configuration finie de cases noires telles qu'en fixant des valeurs booléennes pour a, b, c... et en modifiant quelques cases supplémentaires, la fourmi traversant la configuration laisse derrière elle une configuration de cases noires où l'on peut lire le résultat $g(a, b, c...)$. Il convient de noter que le calcul d'une fonction booléenne est fini (il y a 2^n états possibles pour les n variables), et donc que la conjecture de l'autoroute n'interdisait pas cette construction.

(2) Avec ces calculateurs booléens, ils ont montré qu'on pouvait simuler n'importe quel automate cellulaire unidimensionnel.

Pour lancer le calcul infini d'un automate cellulaire de ce type, il faut au préalable noircir une infinité de cases du plan, selon un schéma répétitif. Cette préparation du plan est descriptible de manière finie (car répétitive), elle est donc acceptable dans la définition d'un système universel. Puisque cette préparation du plan introduit une infinité de cases noires, elle n'entrera pas en contradiction avec la conjecture de l'autoroute.

(3) Les chercheurs ont alors utilisé le résultat qu'il existe des automates cellulaires unidimensionnels universels. Ils en ont tiré que : pour toute fonction calculable $f(n)$, il existe une façon descriptible simplement et de manière finie de préparer le plan avec des cases noires et d'y déposer une fourmi de Langton qui en suivant son trajet transformera les zones où elle passera en laissant écrit derrière elle des configurations de cases noires représentant les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, ... Précisons que si l'on change la fonction f, seules un nombre fini de cases doivent être changées dans la préparation du plan avant d'y lancer la fourmi.

La fourmi de Langton à elle seule a donc un pouvoir de calcul universel.

Il faut noter ici que l'article des trois chercheurs donne tous les détails pour effectuer les constructions, mais que celles-ci restent très difficiles à réaliser à cause de l'empilement des phases (1), (2) et (3), et qu'à ma connaissance la construction décrite n'a jamais été menée explicitement pour une fonction précise.

Une telle situation où l'on montre qu'une construction est possible sans la réaliser concrètement n'est pas nouvelle. John Von Neumann avait décrit dans les années 1940 un automate cellulaire autoreproducteur, qui n'a été concrètement programmé et mis en fonctionnement qu'en 1995. Cela illustre le pouvoir du raisonnement mathématique de démontrer l'existence d'objets sans avoir à les construire vraiment.

LA COMPLEXITÉ DES TURMITES

Le résultat de 2001 portant sur la fourmi de Langton a été généralisé en 2018 par une équipe autour de Diego Maldonado, de l'université d'Orléans, et réunissant à nouveau des chercheurs chiliens. Elle a montré que toute turmite non triviale, c'est-à-dire dont le nom n'est pas composé que de 0 ou que de 1, est universelle.

Les travaux se poursuivent et de nouvelles variantes de la fourmi ont été introduites et étudiées. En particulier, la variante du Polonais Pawel Tokarz, définie en 2018, modifie légèrement la règle de la fourmi en la faisant avancer à chaque étape de k cases (k fixé) au lieu d'une. Une variante programmable de la fourmi due à Mario Markus, Malte Schmick et Eric Goles produit une grande variété de déplacements linaires différents de l'autoroute de Langton. La fourmi de Langton conduit aussi à des applications concrètes: en 2014, des chercheurs de l'université de Mechhed, en Iran, ont construit une fonction pseudoaléatoire utilisable en cryptographie en exploitant les comportements irréguliers de la merveilleuse fourmi et, en 2015, un schéma de chiffrement cryptographique d'images a été tiré du comportement de la fourmi par deux chercheurs de l'université de Dalian, en Chine. ■

BIBLIOGRAPHIE

D. Maldonado *et al.*, **Nontrivial turmites are Turing-universal**, *Journal of Cellular Automata*, vol. 13, pp. 373-392, 2018.

X. Wang et D. Xu, **A novel image encryption scheme using chaos and Langton's Ant cellular automaton**, *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, pp. 2449-2456, 2015.

S. Hosseini *et al.*, **Generating pseudo-random numbers by combining two systems with complex behaviors**, *Journal of Information Security and Applications*, vol. 19(2), pp. 149-162, 2014.

A. Gajardo *et al.*, **Complexity of Langton's ant**, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 117, pp. 41-50, 2002.

D. Gale *et al.*, **Further travels with my ant**, *Mathematical Intelligencer*, vol. 17, pp. 48-56, 1995.

L. Bunimovich et S. Troubetzkoy, **Recurrence properties of Lorentz lattice gas cellular automata**, *Journal of Statistical Physics*, vol. 67, pp. 289-302, 1992.

C. Langton, **Studying artificial life with cellular automata**, *Physica D*, vol. 22, pp. 120-149, 1986.

LOGICIELS POUR TESTER LA FOURMI DE LANGTON

http://golly.sourceforge.net

http://www.langtonant.com

http://www.dwmkerr.com/experiments/langtonsant/

http://hai3.net/langtons_ant