

> suggère qu'il y a autant d'entiers pairs que d'entiers pairs et impairs réunis, lesquels paraissent pourtant deux fois plus nombreux que les seuls entiers pairs!

Dans les années 1870, le mathématicien allemand Georg Cantor a proposé d'utiliser cette propriété de correspondance biunivoque, ou bijection, pour comparer entre eux des ensembles constitués d'une infinité d'éléments. Cela ne conduit directement à aucune contradiction; d'ailleurs, on peut définir un ensemble infini comme étant un ensemble qui est en bijection avec une partie (au sens strict) de lui-même – définition dont on vérifie facilement le bien-fondé sur notre exemple des entiers et des entiers pairs.

Partant de là, Cantor a pu construire une théorie des ensembles qui constitue une théorie mathématique de l'infini et qui est aujourd'hui le socle sur lequel se développent toutes les mathématiques. L'axiomatisation de la théorie des ensembles a fait surgir quelques difficultés, mais celles-ci ont pour l'essentiel fini par être résolues: on dispose, depuis le

début du xx^e siècle, d'un système d'axiomes qui n'a fait apparaître jusqu'ici aucune contradiction dans les travaux des mathématiciens.

Cette théorie axiomatique des ensembles est juste un peu faible en ce sens qu'elle laisse définitivement sans réponse certaines questions élémentaires comme celle dite de «l'hypothèse du continu», que l'on explicitera plus loin. Améliorer la théorie pour qu'elle réponde mieux à ces questions, tel est l'objectif de ceux qui mènent aujourd'hui des recherches dans le domaine de la théorie des ensembles.

RÉPONDRE À DES QUESTIONS QUI ÉTAIENT A PRIORI SANS RÉPONSE

Or des résultats très intéressants ont été obtenus dans cette direction au cours de la dernière décennie, et l'un des principaux protagonistes de cette histoire est Hugh Woodin. Ce mathématicien travaillant aujourd'hui à l'université Harvard, aux États-Unis, a la profonde conviction que l'énigme de l'hypothèse du continu dispose d'une solution, c'est-à-dire que

L'INFINI DÉNOMBRABLE ET LE CONTINU

Pour comparer les tailles d'ensembles E_1 et E_2 constitués d'une infinité d'éléments, on cherche à savoir s'il existe une bijection (une correspondance biunivoque) entre les éléments de E_1 et ceux de E_2 . Si c'est le cas, on dit que E_1 et E_2 sont équipotents, ou qu'ils ont le même cardinal.

Un ensemble infini qui est équipotent à l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ des entiers naturels est dit «dénombrable». On constate aisément que, par exemple, l'ensemble des nombres pairs (a), l'ensemble des multiples de 5 (b), l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs (c) sont dénombrables. On peut aussi montrer facilement que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (ceux qui, comme $1/2$ ou $7/3$, peuvent s'écrire sous la forme p/q , où p et q sont des entiers) est dénombrable. Il en est de même de l'ensemble des couples (p, q) d'entiers, des triplets (u, v, w) de nombres rationnels, etc.

En revanche, l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 (par exemple) n'est

pas dénombrable. En voici une démonstration. Supposons que cet ensemble $[0, 1]$ soit dénombrable. On pourrait alors énumérer ses éléments un à un, ce qui donnerait une liste infinie (mais dénombrable) de nombres du type :

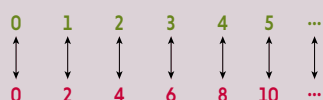
$0, d_{1,1} d_{1,2} d_{1,3} d_{1,4} d_{1,5} d_{1,6} \dots$
 $0, d_{2,1} d_{2,2} d_{2,3} d_{2,4} d_{2,5} d_{2,6} \dots$
 $0, d_{3,1} d_{3,2} d_{3,3} d_{3,4} d_{3,5} d_{3,6} \dots$
 $0, d_{4,1} d_{4,2} d_{4,3} d_{4,4} d_{4,5} d_{4,6} \dots$
 $\dots$

où les $d_{i,j}$, $d_{i,2}$, $d_{i,3}$, etc. sont les chiffres du développement décimal du i -ième nombre de la liste (on exclut ici les développements décimaux qui se terminent par une infinité de 9). Formons alors un nombre $x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$ tel que $d_1 \neq d_{1,1}$, $d_2 \neq d_{2,2}$, $d_3 \neq d_{3,3}$, etc. (en évitant

de choisir 9 pour les d_i). On constate que x ne figure pas dans la liste ci-dessus (car quel que soit n , sa n -ième décimale diffère de la n -ième décimale du n -ième nombre de la liste), alors que x est bien un nombre réel compris entre 0 et 1. Cette contradiction montre que l'hypothèse de départ, à savoir que l'ensemble $[0, 1]$ est dénombrable et donc que ses éléments sont énumérables par une liste, est fautive.

Ainsi, les nombres réels compris entre 0 et 1 ne sont pas dénombrables. Leur infinité est d'un ordre supérieur à celle de $\mathbb{N}$ et l'on parle de l'infini continu, les nombres réels pouvant être représentés par les points d'une ligne continue. Cette représentation géométrique des nombres permet d'ailleurs de voir facilement que l'intervalle $[0, 1]$ est équipotent à, par exemple, l'intervalle $[0, 5]$: deux intervalles de longueurs différentes ont la même infinité de points (d)... On peut aussi démontrer des choses plus étonnantes, par exemple que la surface d'un carré, ou le volume d'un cube, contient la même infinité de points qu'un segment de droite.

a L'ensemble des nombres pairs est dénombrable



b L'ensemble des multiples de 5 est dénombrable



c L'ensemble des entiers relatifs est dénombrable



d L'ensemble des points d'un segment de longueur 1 est équipotent à l'ensemble des points d'un segment de longueur 5

