

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LES GRANDS CARDINAUX

L'hypothèse du continu, ou HC, a été considérée la première fois par Georg Cantor. Elle affirme qu'entre l'infini des nombres entiers (l'infini dénombrable) et l'infini des nombres réels (le continu), il n'existe pas d'autre infini.

Aucune intuition claire ne s'impose à propos de la vérité ou de la fausseté de HC. Ce n'est pas le cas pour les axiomes dits « de grands cardinaux », qui affirment l'existence d'ensembles infinis très grands, comme celle d'un ensemble qui, en taille, dépasserait chacun des infinis de la liste $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ...

On connaît une série d'axiomes de grands cardinaux. On les considère vrais *a priori*, car les refuser reviendrait à limiter l'infini, ce qui semble absurde.

Ces axiomes permettent de prouver des résultats qu'on ne peut pas obtenir sans eux, et conduisent

même à démontrer des résultats portant sur les nombres entiers. Le mathématicien Alexandre Grothendieck a utilisé de tels axiomes dans ses travaux sur la théorie des catégories, et la démonstration du grand théorème de Fermat (selon lequel il n'existe pas d'entiers positifs x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$ dès que l'entier n est supérieur à 3), au moins dans un premier temps, semblait ne pas pouvoir s'en dispenser.

On a espéré que certains axiomes de grands cardinaux auraient pour conséquence HC ou non-HC, ce qui aurait résolu l'énigme de l'hypothèse du continu. On a malheureusement établi que cela ne pouvait pas être le cas. On est donc reparti à la recherche de nouveaux axiomes naturels qui fixeraient la vérité ou la fausseté de HC.



Georg Cantor (1845-1918)

soit cette hypothèse est vraie, soit elle est fausse: elle ne devrait pas être «indécidable». Cela l'a conduit à proposer et à faire avancer deux programmes de recherche opposés.

Le premier devait établir que l'hypothèse du continu est fausse. Il y a quinze ans, Hugh Woodin croyait possible son aboutissement. Mais il a changé d'avis et lancé un second programme de recherche qui porte sur ce qu'on dénomme le «L ultime» et qui, selon lui, conduira à une solution satisfaisante et définitive des principales énigmes posées par l'infini – notamment à la preuve que l'hypothèse du continu est vraie.

C'est cette voie vers le L ultime que je vais tenter d'expliquer dans ses grandes lignes. Revenons un peu en arrière pour comprendre les termes du problème.

Découverte par Cantor et publiée en 1891, la vérité la plus simple concernant l'infini mathématique est qu'il en existe plusieurs sortes. De façon plus générale, le théorème de Cantor

indique qu'à chaque fois que l'on considère un ensemble infini E , l'ensemble de ses parties (ou sous-ensembles), noté $\mathcal{P}(E)$, est d'une taille infinie strictement supérieure à celle de E . Cela signifie que $\mathcal{P}(E)$ ne peut pas être mis en correspondance biunivoque, ou bijection, avec E .

Ainsi, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ est strictement plus petit que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de ses parties, qui comprend par exemple $\mathbb{N}$ lui-même, l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres premiers, l'ensemble des puissances de 2, etc. Il y a dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ trop d'éléments pour qu'on puisse les mettre en bijection avec ceux de $\mathbb{N}$.

Et en répétant l'opération, c'est-à-dire en considérant la suite $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, etc., on dispose, grâce au théorème de Cantor, d'une infinité d'ensembles infinis différents et de plus en plus grands.

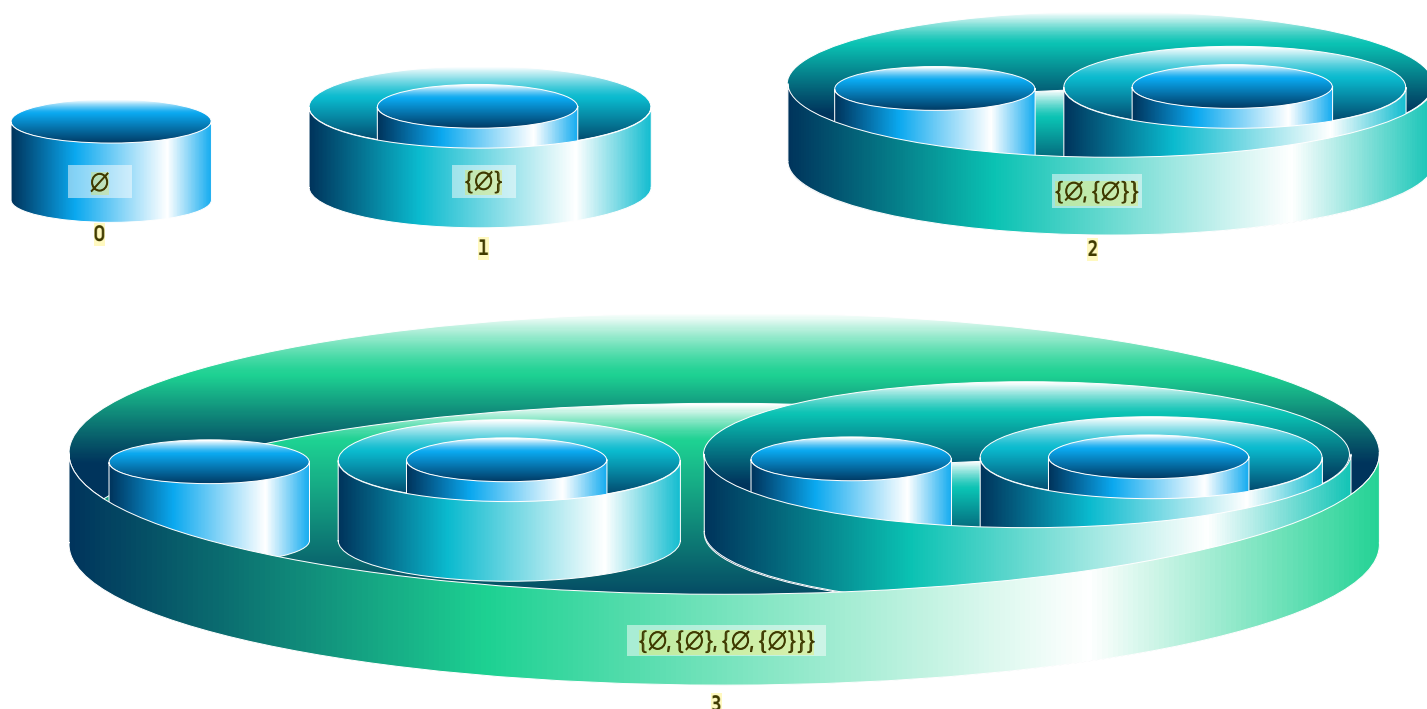
L'HYPOTHÈSE DU CONTINU: PAS D'INFINI INTERMÉDIAIRE ENTRE CELUI DE $\mathbb{N}$ ET CELUI DE $\mathbb{R}$

L'infini des entiers naturels, $\mathbb{N}$, est le plus simple et le plus petit qui existe. On l'appelle l'infini dénombrable, et tout ensemble infini qui peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit «dénombrable» (voir l'encadré page précédente). Un infini d'ordre supérieur est celui de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, comme on l'a vu. On peut en donner une représentation moins abstraite: cet infini est le même que celui de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, car on démontre assez facilement qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$.

Sachant que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\mathbb{R}$ est un ensemble strictement plus «grand» que $\mathbb{N}$, se pose la question suivante: existe-t-il des infinis intermédiaires entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$? Les mathématiciens n'en ont jamais rencontré, et ils ont donc été amenés à supposer que de tels infinis intermédiaires n'existent pas: telle est l'hypothèse du continu, posée à l'origine par Cantor. Ici, le mot «continu» évoque l'infinité des nombres réels, ces nombres pouvant être représentés par les points d'une ligne continue.

Autrement dit, l'hypothèse du continu affirme que tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est soit en bijection avec $\mathbb{N}$ (si c'est un «petit» infini), soit en bijection avec $\mathbb{R}$ lui-même (si c'est un «gros» sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$).

L'hypothèse du continu constitue la plus simple des questions non résolues concernant les infinis. On la juge importante et, d'ailleurs, le mathématicien allemand David Hilbert l'avait placée en tête de sa célèbre liste des 23 grands problèmes présentée en 1900 au Congrès international des mathématiciens, à Paris. Plus d'un siècle après sa formulation, nul n'a su résoudre définitivement la question: on n'a jamais rencontré de partie infinie de $\mathbb{R}$ qu'on ne sache pas mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ ➤



ou avec $\mathbb{R}$, mais on n'a pas démontré qu'une telle partie n'existait pas.

Les logiciens ont cependant obtenu d'intéressants résultats qui, dans un premier temps, ont aggravé le mystère. Ils portent sur la théorie des ensembles telle qu'elle a été formalisée au début du xx^e siècle et qui repose sur un système d'axiomes élaboré par plusieurs chercheurs, en particulier les Allemands Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel. Ce système d'axiomes est noté ZFC d'après les initiales de ces derniers, le C représentant l'axiome du choix, un axiome au statut particulier (il stipule qu'étant donnée une collection d'ensembles non vides, il existe toujours un ensemble ayant exactement un élément commun avec chacun de ces ensembles).

Or en 1938, le logicien autrichien Kurt Gödel a prouvé que si la théorie des ensembles construite sur ZFC est non contradictoire (c'est-à-dire qu'elle ne conduit pas à une affirmation et son contraire), alors elle ne peut pas démontrer que l'hypothèse du continu est fausse. En d'autres termes, si l'on note HC l'hypothèse du continu («Il n'existe pas d'infini intermédiaire entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ ») et non-HC sa négation («Il existe un infini intermédiaire entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ »), la théorie ZFC ne peut pas démontrer non-HC.

La surprise est surtout venue en 1963 de la preuve apportée par le mathématicien américain Paul Cohen que si la théorie ZFC n'est pas contradictoire, alors elle ne peut pas démontrer l'hypothèse du continu. Ce résultat et celui de 1938 montrent donc que HC est logiquement indépendante des axiomes ZFC.

En d'autres termes, l'hypothèse du continu est un énoncé «indécidable» de la théorie ZFC.

Une interprétation possible de cette indépendance vis-à-vis des axiomes ZFC est que les mathématiciens ont le choix de faire ce qui leur plaît : ajouter l'hypothèse du continu, HC, comme axiome à leur théorie, ou ajouter sa négation, non-HC. Mais cette interprétation est incompatible avec l'idée qu'il existe une réalité ensembliste unique, et Gödel la refusait donc (voir l'encadré page 34). Pour lui, l'indécidabilité de l'hypothèse du continu dans la théorie ZFC signifiait que les axiomes ZFC ne donnent pas une description complète de cette réalité ensembliste à laquelle, comme beaucoup de mathématiciens, il croyait. D'où un programme : trouver de nouveaux axiomes et les ajouter à ZFC jusqu'à ce qu'ils permettent de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou non.

AJOUTER DE NOUVEAUX AXIOMES POUR LEVER L'INDÉCIDABILITÉ

Certains axiomes envisagés pour compléter ZFC, y compris par Gödel lui-même, ne sont pas satisfaisants, car les axiomes doivent avoir un fondement intuitif. C'est d'ailleurs pourquoi ajouter HC ou non-HC comme axiome n'est pas considéré comme une solution : notre intuition ne nous souffle rien de vraiment clair concernant HC. Trouver de bons axiomes est tout le problème.

Pour comprendre les idées nouvelles introduites par Hugh Woodin, il nous faut maintenant expliquer brièvement de quoi est fait l'univers ensembliste découvert par Cantor.

Une représentation imagée des premiers « entiers de von Neumann », c'est-à-dire des nombres entiers tels qu'on les définit en termes d'ensembles.