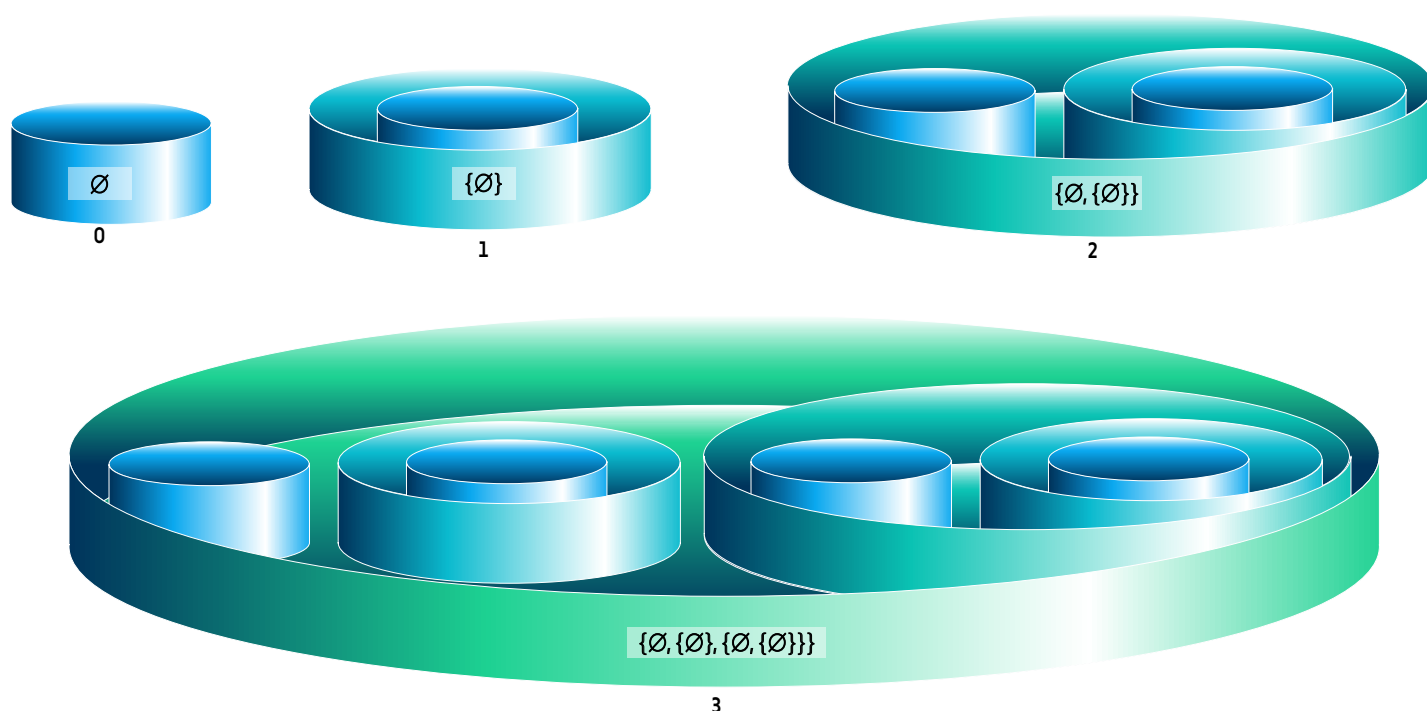




> ou avec $\mathbb{R}$, mais on n'a pas démontré qu'une telle partie n'existait pas.

Les logiciens ont cependant obtenu d'intéressants résultats qui, dans un premier temps, ont aggravé le mystère. Ils portent sur la théorie des ensembles telle qu'elle a été formalisée au début du xx^e siècle et qui repose sur un système d'axiomes élaboré par plusieurs chercheurs, en particulier les Allemands Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel. Ce système d'axiomes est noté ZFC d'après les initiales de ces derniers, le C représentant l'axiome du choix, un axiome au statut particulier (il stipule qu'étant donnée une collection d'ensembles non vides, il existe toujours un ensemble ayant exactement un élément commun avec chacun de ces ensembles).

Or en 1938, le logicien autrichien Kurt Gödel a prouvé que si la théorie des ensembles construite sur ZFC est non contradictoire (c'est-à-dire qu'elle ne conduit pas à une affirmation et son contraire), alors elle ne peut pas démontrer que l'hypothèse du continu est fausse. En d'autres termes, si l'on note HC l'hypothèse du continu («Il n'existe pas d'infini intermédiaire entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ ») et non-HC sa négation («Il existe un infini intermédiaire entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ »), la théorie ZFC ne peut pas démontrer non-HC.

La surprise est surtout venue en 1963 de la preuve apportée par le mathématicien américain Paul Cohen que si la théorie ZFC n'est pas contradictoire, alors elle ne peut pas démontrer l'hypothèse du continu. Ce résultat et celui de 1938 montrent donc que HC est logiquement indépendante des axiomes ZFC.

En d'autres termes, l'hypothèse du continu est un énoncé «indécidable» de la théorie ZFC.

Une interprétation possible de cette indépendance vis-à-vis des axiomes ZFC est que les mathématiciens ont le choix de faire ce qui leur plaît : ajouter l'hypothèse du continu, HC, comme axiome à leur théorie, ou ajouter sa négation, non-HC. Mais cette interprétation est incompatible avec l'idée qu'il existe une réalité ensembliste unique, et Gödel la refusait donc (voir l'encadré page 34). Pour lui, l'indécidabilité de l'hypothèse du continu dans la théorie ZFC signifiait que les axiomes ZFC ne donnent pas une description complète de cette réalité ensembliste à laquelle, comme beaucoup de mathématiciens, il croyait. D'où un programme : trouver de nouveaux axiomes et les ajouter à ZFC jusqu'à ce qu'ils permettent de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou non.

AJOUTER DE NOUVEAUX AXIOMES POUR LEVER L'INDÉCIDABILITÉ

Certains axiomes envisagés pour compléter ZFC, y compris par Gödel lui-même, ne sont pas satisfaisants, car les axiomes doivent avoir un fondement intuitif. C'est d'ailleurs pourquoi ajouter HC ou non-HC comme axiome n'est pas considéré comme une solution : notre intuition ne nous souffle rien de vraiment clair concernant HC. Trouver de bons axiomes est tout le problème.

Pour comprendre les idées nouvelles introduites par Hugh Woodin, il nous faut maintenant expliquer brièvement de quoi est fait l'univers ensembliste découvert par Cantor.

Une représentation imagée des premiers « entiers de von Neumann », c'est-à-dire des nombres entiers tels qu'on les définit en termes d'ensembles.

ORDINAUX ET L ULTIME

Les ordinaux sont une généralisation des nombres entiers, très différente de celle que constituent les nombres réels. Ils constituent une façon de prendre au sérieux les infinis et de les ordonner. Après la série ordonnée des nombres entiers, on considère qu'il existe un nouveau nombre, noté ω . On ne s'arrête pas là et on considère que, de la même façon qu'après 0 il y a 1, après ω il y a $\omega + 1$, puis $\omega + 2$, etc. Au-delà de cette deuxième série infinie, il y a $\omega \cdot 2$, puis $\omega \cdot 3$, etc. L'image ci-dessous est une tentative de représentation des ordinaux.

Définissables à partir de l'ensemble vide (voir le texte de l'article), ces ordinaux constituent une structure qu'on essaie de comprendre depuis que Cantor les a

découverts. On les utilise en particulier pour définir des ensembles V_α de plus en plus grands, dont on montre qu'ils forment l'univers ensembliste dans sa totalité, noté V .

En jouant avec la définition des V_α , on construit des sous-univers du monde ensembliste (on parle de « modèles internes ») qui, bien que plus petits que V , en ont les propriétés fondamentales. C'est avec l'un de ces sous-univers, noté L , que Gödel a montré que la théorie usuelle des ensembles est compatible avec l'hypothèse du continu, HC. Mais Paul Cohen a montré qu'elle était aussi compatible avec non-HC. L'idée utilisée pour définir L a été reprise sous le nom de « L ultime » et semble mener vers une solution concernant HC qui, finalement, serait vraie.

