

ORDINAUX ET L ULTIME

Les ordinaux sont une généralisation des nombres entiers, très différente de celle que constituent les nombres réels. Ils constituent une façon de prendre au sérieux les infinis et de les ordonner. Après la série ordonnée des nombres entiers, on considère qu'il existe un nouveau nombre, noté ω . On ne s'arrête pas là et on considère que, de la même façon qu'après 0 il y a 1, après ω il y a $\omega + 1$, puis $\omega + 2$, etc. Au-delà de cette deuxième série infinie, il y a $\omega \cdot 2$, puis $\omega \cdot 3$, etc. L'image ci-dessous est une tentative de représentation des ordinaux.

Définissables à partir de l'ensemble vide (voir le texte de l'article), ces ordinaux constituent une structure qu'on essaie de comprendre depuis que Cantor les a

découverts. On les utilise en particulier pour définir des ensembles V_α de plus en plus grands, dont on montre qu'ils forment l'univers ensembliste dans sa totalité, noté V .

En jouant avec la définition des V_α , on construit des sous-univers du monde ensembliste (on parle de « modèles internes ») qui, bien que plus petits que V , en ont les propriétés fondamentales. C'est avec l'un de ces sous-univers, noté L , que Gödel a montré que la théorie usuelle des ensembles est compatible avec l'hypothèse du continu, HC. Mais Paul Cohen a montré qu'elle était aussi compatible avec non-HC. L'idée utilisée pour définir L a été reprise sous le nom de « L ultime » et semble mener vers une solution concernant HC qui, finalement, serait vraie.

La colonne vertébrale de cet univers est donnée par la suite des « ordinaux », qui sont les nombres permettant de compter dans un ordre progressif les éléments d'un ensemble, qu'il soit fini ou infini. Le début de cette suite est composé des nombres entiers naturels, définis sous une forme ensembliste et nommés dans ce contexte « entiers de von Neumann ». Ils se construisent en partant de l'ensemble vide (celui qui ne contient rien), noté $\emptyset$, en posant : $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ..., $n+1 = n \cup \{n\}$, ..., où $\cup$ est le symbole désignant la réunion de deux ensembles (voir la figure page précédente). Dans cette représentation, l'entier n est donc constitué des entiers allant de 0 jusqu'à $n-1$.

L'UNIVERS ENSEMBLISTE : UNE CHAÎNE INFINIE ET CUMULATIVE

Les ordinaux ne s'arrêtent pas aux entiers. Le premier ordinal infini – on dit aussi transfini – est obtenu en prenant d'un coup tous les entiers, et est noté ω (oméga) :

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

On peut alors poursuivre : $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$, $\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$, etc. On arrive ainsi à $\omega + \omega$, noté $\omega \cdot 2$, puis, plus loin, à $\omega \cdot 3$, et ainsi de suite. Plus loin encore, on obtient ω^2 , ω^3 , ..., ω^ω , ... (voir l'encadré ci-contre).

Notons qu'il y a deux sortes d'ordinaux : ceux qui ont un prédécesseur, par exemple $\omega + 1$ ou $\omega^3 + 32$, et ceux qui n'en ont pas, par exemple ω , $\omega \cdot 2$ ou ω^4 . Ces derniers sont appelés « ordinaux limites ».

Avec les ordinaux et l'opération $\mathcal{P}$ qui, à un ensemble E , associe l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties, on obtient une hiérarchie d'ensembles emboîtés qui sera le centre de notre discussion. On pose :

$$V_0 = \emptyset;$$

$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ si $\alpha + 1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α ;

V_β = la réunion de tous les V_α tels que $\alpha < \beta$, si β est un ordinal limite.

Les V_α sont donc des ensembles d'ensembles de plus en plus grands. Ils constituent la totalité du monde ensembliste. En effet, la théorie ZFC permet de démontrer que tout ensemble est dans l'un des V_α . Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est dans V_ω , tandis que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'apparaît que plus loin, et l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des parties de $\mathbb{R}$ encore un peu plus loin, etc.

On note alors V l'univers ensembliste obtenu en prenant tous les V_α . Puisque tout ensemble est dans l'un des V_α , tout provient de l'ensemble vide $\emptyset$: le monde ensembliste n'est constitué que du vide et de ce que sa présence implique...

Revenons maintenant à la preuve par Gödel, en 1938, que non-HC ne résulte pas des >

