

ORDINAUX ET L ULTIME

Les ordinaux sont une généralisation des nombres entiers, très différente de celle que constituent les nombres réels. Ils constituent une façon de prendre au sérieux les infinis et de les ordonner. Après la série ordonnée des nombres entiers, on considère qu'il existe un nouveau nombre, noté ω . On ne s'arrête pas là et on considère que, de la même façon qu'après 0 il y a 1, après ω il y a $\omega + 1$, puis $\omega + 2$, etc. Au-delà de cette deuxième série infinie, il y a $\omega \cdot 2$, puis $\omega \cdot 3$, etc. L'image ci-dessous est une tentative de représentation des ordinaux.

Définissables à partir de l'ensemble vide (voir le texte de l'article), ces ordinaux constituent une structure qu'on essaie de comprendre depuis que Cantor les a

découverts. On les utilise en particulier pour définir des ensembles V_α de plus en plus grands, dont on montre qu'ils forment l'univers ensembliste dans sa totalité, noté V .

En jouant avec la définition des V_α , on construit des sous-univers du monde ensembliste (on parle de « modèles internes ») qui, bien que plus petits que V , en ont les propriétés fondamentales. C'est avec l'un de ces sous-univers, noté L , que Gödel a montré que la théorie usuelle des ensembles est compatible avec l'hypothèse du continu, HC. Mais Paul Cohen a montré qu'elle était aussi compatible avec non-HC. L'idée utilisée pour définir L a été reprise sous le nom de « L ultime » et semble mener vers une solution concernant HC qui, finalement, serait vraie.

La colonne vertébrale de cet univers est donnée par la suite des « ordinaux », qui sont les nombres permettant de compter dans un ordre progressif les éléments d'un ensemble, qu'il soit fini ou infini. Le début de cette suite est composé des nombres entiers naturels, définis sous une forme ensembliste et nommés dans ce contexte « entiers de von Neumann ». Ils se construisent en partant de l'ensemble vide (celui qui ne contient rien), noté $\emptyset$, en posant : $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ..., $n+1 = n \cup \{n\}$, ..., où $\cup$ est le symbole désignant la réunion de deux ensembles (voir la figure page précédente). Dans cette représentation, l'entier n est donc constitué des entiers allant de 0 jusqu'à $n-1$.

L'UNIVERS ENSEMBLISTE : UNE CHAÎNE INFINIE ET CUMULATIVE

Les ordinaux ne s'arrêtent pas aux entiers. Le premier ordinal infini – on dit aussi transfini – est obtenu en prenant d'un coup tous les entiers, et est noté ω (oméga) :

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

On peut alors poursuivre : $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$, $\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$, etc. On arrive ainsi à $\omega + \omega$, noté $\omega \cdot 2$, puis, plus loin, à $\omega \cdot 3$, et ainsi de suite. Plus loin encore, on obtient ω^2 , ω^3 , ..., ω^ω , ... (voir l'encadré ci-contre).

Notons qu'il y a deux sortes d'ordinaux : ceux qui ont un prédécesseur, par exemple $\omega + 1$ ou $\omega^3 + 32$, et ceux qui n'en ont pas, par exemple ω , $\omega \cdot 2$ ou ω^4 . Ces derniers sont appelés « ordinaux limites ».

Avec les ordinaux et l'opération $\mathcal{P}$ qui, à un ensemble E , associe l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties, on obtient une hiérarchie d'ensembles emboîtés qui sera le centre de notre discussion. On pose :

$$V_0 = \emptyset;$$

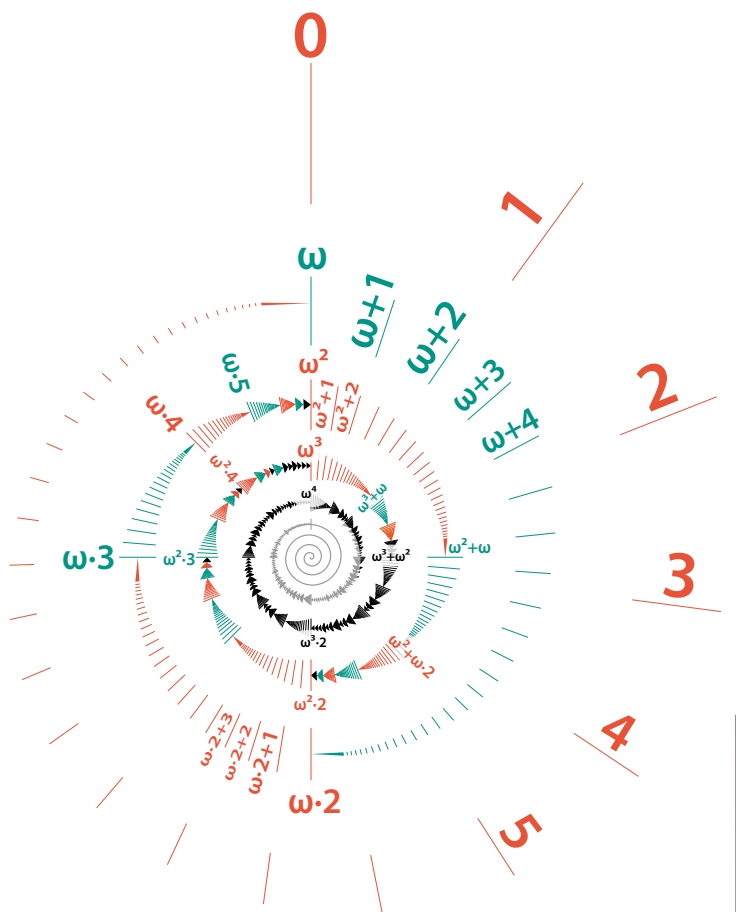
$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ si $\alpha+1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α ;

V_β = la réunion de tous les V_α tels que $\alpha < \beta$, si β est un ordinal limite.

Les V_α sont donc des ensembles d'ensembles de plus en plus grands. Ils constituent la totalité du monde ensembliste. En effet, la théorie ZFC permet de démontrer que tout ensemble est dans l'un des V_α . Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est dans V_ω , tandis que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'apparaît que plus loin, et l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des parties de $\mathbb{R}$ encore un peu plus loin, etc.

On note alors V l'univers ensembliste obtenu en prenant tous les V_α . Puisque tout ensemble est dans l'un des V_α , tout provient de l'ensemble vide $\emptyset$: le monde ensembliste n'est constitué que du vide et de ce que sa présence implique...

Revenons maintenant à la preuve par Gödel, en 1938, que non-HC ne résulte pas des >



➤ axiomes ZFC. Gödel a utilisé pour ce faire un procédé dont l'idée est facile à comprendre... même si tous les détails ne le sont pas ! Son point de départ était l'hypothèse que la théorie ZFC n'est pas contradictoire. En vertu de son théorème de complétude démontré en 1929 (voir l'encadré ci-contre), il existe alors une structure vérifiant tous les axiomes ZFC. Gödel en a déduit une autre structure vérifiant tous les axiomes ZFC et vérifiant aussi l'hypothèse du continu. Ce qui montre que le système ZFC+HC est non contradictoire – et donc que l'on ne peut pas déduire non-HC du système ZFC (en effet, si de ZFC on pouvait déduire non-HC, on pourrait aussi déduire non-HC du système ZFC+HC, lequel donnerait alors à la fois HC et non-HC, ce qui serait contradictoire).

Comment Gödel a-t-il obtenu la structure en question ? L'idée de la méthode est analogue à celle souvent utilisée en algèbre où, partant d'une structure qui vérifie par exemple les axiomes de groupe, comme l'ensemble des nombres réels muni de l'opération d'addition, on considère tous les éléments dont l'existence se déduit de celle d'un élément particulier ; ainsi, si l'on choisit le nombre 1, on en déduit la sous-structure constituée de 1, -1, 1+1, 1+1+1, etc., qui est le « sous-groupe engendré par 1 ». Dans cet exemple, ce procédé donne $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

PASSER PAR UN UNIVERS ENSEMBLISTE PLUS RESTREINT

Autrement dit, l'idée est de partir d'une structure vérifiant certains axiomes et d'en déduire une structure plus petite qui les vérifie aussi et qui, éventuellement, a d'autres propriétés intéressantes.

La méthode de Gödel part donc de l'univers V décrit plus haut et vérifiant les axiomes ZFC. Pour définir une sous-structure, qui sera notée L , il s'est inspiré de la définition des V_α en la modifiant légèrement :

$$L_0 = \emptyset;$$

$L_{\alpha+1} = \mathcal{P}_{\text{def}}(L_\alpha)$ si $\alpha+1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α ;

L_β = la réunion de tous les L_α tels que $\alpha < \beta$, si β est un ordinal limite.

Ici, $\mathcal{P}_{\text{def}}(E)$ désigne l'ensemble des parties constructibles de l'ensemble E , c'est-à-dire définissables par une formule – une expression écrite dans le langage formel de la théorie des ensembles et dont les paramètres sont dans E . Si l'on prend, mettons, l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, un exemple simple de partie constructible de $\mathbb{N}$ est l'ensemble X constitué des éléments x de $\mathbb{N}$ tels qu'il existe un y de $\mathbb{N}$ vérifiant $x+y=5$ (tout cela peut se traduire par une formule). On a dans ce cas $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La différence entre $\mathcal{P}_{\text{def}}(E)$ et $\mathcal{P}(E)$ provient de ce que, en général, certaines parties

d'un ensemble E n'ont pas une définition permettant de les caractériser. Par exemple, il n'existe qu'une infinité dénombrable de parties définissables de $\mathbb{N}$ (car il n'y a qu'une infinité dénombrable de formules), alors qu'il existe une infinité non dénombrable de parties de $\mathbb{N}$.

La réunion de tous les L_α , notée L , est l'« univers des ensembles constructibles ». C'est un univers ensembliste inclus dans V , dans lequel tous les axiomes ZFC sont vrais. Le point important démontré par Gödel est que, dans L , l'hypothèse du continu est vraie. La méthode de Gödel montre donc que, partant d'une structure qui vérifie ZFC, on sait en trouver une sous-structure qui vérifie ZFC+HC ; par conséquent, elle prouve que si ZFC est non contradictoire, alors ZFC+HC est non contradictoire.

STRUCTURES ET « CONSISTANCE RELATIVE »

Un résultat de base pour travailler sur les systèmes axiomatiques est le théorème de complétude, que Kurt Gödel a prouvé en 1929 dans sa thèse de doctorat, avant de démontrer ses fameux théorèmes d'incomplétude.

Le théorème de complétude affirme qu'une théorie définie par des axiomes logiques est non contradictoire si et seulement s'il existe au moins une structure qui satisfait tous ses axiomes.

Par exemple, l'axiome « pour tout x , il existe un y tel que $x < y$ » est non contradictoire, car, en considérant la structure $\mathbb{N}$ (les entiers naturels) avec pour relation $<$ la relation d'ordre habituelle sur les entiers, on voit que l'axiome est satisfait.

Dans le cas d'un système d'axiomes plus compliqué, il n'est bien sûr pas aussi facile de proposer une structure satisfaisant le système d'axiomes. Pour la théorie des ensembles, on se rabat sur la méthode

dite « de consistance relative » : on suppose qu'un système S d'axiomes est non contradictoire ; on en déduit, par le théorème de complétude, qu'il existe une structure M satisfaisant tous les axiomes de S ; on modifie M en M' pour que M' vérifie un axiome de plus, noté X ; l'existence de cette structure M' montre que le système $S + X$ est non contradictoire. Cette construction démontre donc l'implication : S est non contradictoire $\Rightarrow S + X$ est non contradictoire.

C'est la méthode utilisée par Kurt Gödel et Paul Cohen pour démontrer que : ZFC est non contradictoire $\Rightarrow$ ZFC + HC est non contradictoire (Gödel, 1938) et que : ZFC est non contradictoire $\Rightarrow$ ZFC + non-HC est non contradictoire (Cohen, 1963).



Kurt Gödel (1906-1978)