

> axiomes ZFC. Gödel a utilisé pour ce faire un procédé dont l'idée est facile à comprendre... même si tous les détails ne le sont pas ! Son point de départ était l'hypothèse que la théorie ZFC n'est pas contradictoire. En vertu de son théorème de complétude démontré en 1929 (voir l'encadré ci-contre), il existe alors une structure vérifiant tous les axiomes ZFC. Gödel en a déduit une autre structure vérifiant tous les axiomes ZFC et vérifiant aussi l'hypothèse du continu. Ce qui montre que le système ZFC+HC est non contradictoire – et donc que l'on ne peut pas déduire non-HC du système ZFC (en effet, si de ZFC on pouvait déduire non-HC, on pourrait aussi déduire non-HC du système ZFC+HC, lequel donnerait alors à la fois HC et non-HC, ce qui serait contradictoire).

Comment Gödel a-t-il obtenu la structure en question ? L'idée de la méthode est analogue à celle souvent utilisée en algèbre où, partant d'une structure qui vérifie par exemple les axiomes de groupe, comme l'ensemble des nombres réels muni de l'opération d'addition, on considère tous les éléments dont l'existence se déduit de celle d'un élément particulier ; ainsi, si l'on choisit le nombre 1, on en déduit la sous-structure constituée de 1, -1, 1+1, 1+1+1, etc., qui est le « sous-groupe engendré par 1 ». Dans cet exemple, ce procédé donne $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

PASSER PAR UN UNIVERS ENSEMBLISTE PLUS RESTREINT

Autrement dit, l'idée est de partir d'une structure vérifiant certains axiomes et d'en déduire une structure plus petite qui les vérifie aussi et qui, éventuellement, a d'autres propriétés intéressantes.

La méthode de Gödel part donc de l'univers V décrit plus haut et vérifiant les axiomes ZFC. Pour définir une sous-structure, qui sera notée L , il s'est inspiré de la définition des V_α en la modifiant légèrement :

$$L_0 = \emptyset;$$

$L_{\alpha+1} = \mathcal{P}_{\text{def}}(L_\alpha)$ si $\alpha+1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α ;

L_β = la réunion de tous les L_α tels que $\alpha < \beta$, si β est un ordinal limite.

Ici, $\mathcal{P}_{\text{def}}(E)$ désigne l'ensemble des parties constructibles de l'ensemble E , c'est-à-dire définissables par une formule – une expression écrite dans le langage formel de la théorie des ensembles et dont les paramètres sont dans E . Si l'on prend, mettons, l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, un exemple simple de partie constructible de $\mathbb{N}$ est l'ensemble X constitué des éléments x de $\mathbb{N}$ tels qu'il existe un y de $\mathbb{N}$ vérifiant $x+y=5$ (tout cela peut se traduire par une formule). On a dans ce cas $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La différence entre $\mathcal{P}_{\text{def}}(E)$ et $\mathcal{P}(E)$ provient de ce que, en général, certaines parties

STRUCTURES ET « CONSISTANCE RELATIVE »

Un résultat de base pour travailler sur les systèmes axiomatiques est le théorème de complétude, que Kurt Gödel a prouvé en 1929 dans sa thèse de doctorat, avant de démontrer ses fameux théorèmes d'incomplétude.

Le théorème de complétude affirme qu'une théorie définie par des axiomes logiques est non contradictoire si et seulement s'il existe au moins une structure qui satisfait tous ses axiomes.

Par exemple, l'axiome « pour tout x , il existe un y tel que $x < y$ » est non contradictoire, car, en considérant la structure $\mathbb{N}$ (les entiers naturels) avec pour relation $<$ la relation d'ordre habituelle sur les entiers, on voit que l'axiome est satisfait.

Dans le cas d'un système d'axiomes plus compliqué, il n'est bien sûr pas aussi facile de proposer une structure satisfaisant le système d'axiomes. Pour la théorie des ensembles, on se rabat sur la méthode

dite « de consistance relative » : on suppose qu'un système S d'axiomes est non contradictoire ; on en déduit, par le théorème de complétude, qu'il existe une structure M satisfaisant tous les axiomes de S ; on modifie M en M' pour que M' vérifie un axiome de plus, noté X ; l'existence de cette structure M' montre que le système $S + X$ est non contradictoire. Cette construction démontre donc l'implication : S est non contradictoire $\Rightarrow S + X$ est non contradictoire.

C'est la méthode utilisée par Kurt Gödel et Paul Cohen pour démontrer que : ZFC est non contradictoire $\Rightarrow ZFC + HC$ est non contradictoire (Gödel, 1938) et que : ZFC est non contradictoire $\Rightarrow ZFC + \text{non-HC}$ est non contradictoire (Cohen, 1963).



Kurt Gödel (1906-1978)

d'un ensemble E n'ont pas une définition permettant de les caractériser. Par exemple, il n'existe qu'une infinité dénombrable de parties définissables de $\mathbb{N}$ (car il n'y a qu'une infinité dénombrable de formules), alors qu'il existe une infinité non dénombrable de parties de $\mathbb{N}$.

La réunion de tous les L_α , notée L , est l'« univers des ensembles constructibles ». C'est un univers ensembliste inclus dans V , dans lequel tous les axiomes ZFC sont vrais. Le point important démontré par Gödel est que, dans L , l'hypothèse du continu est vraie. La méthode de Gödel montre donc que, partant d'une structure qui vérifie ZFC, on sait en trouver une sous-structure qui vérifie ZFC+HC ; par conséquent, elle prouve que si ZFC est non contradictoire, alors ZFC+HC est non contradictoire.