

> axiomes ZFC. Gödel a utilisé pour ce faire un procédé dont l'idée est facile à comprendre... même si tous les détails ne le sont pas ! Son point de départ était l'hypothèse que la théorie ZFC n'est pas contradictoire. En vertu de son théorème de complétude démontré en 1929 (voir l'encadré ci-contre), il existe alors une structure vérifiant tous les axiomes ZFC. Gödel en a déduit une autre structure vérifiant tous les axiomes ZFC et vérifiant aussi l'hypothèse du continu. Ce qui montre que le système ZFC+HC est non contradictoire – et donc que l'on ne peut pas déduire non-HC du système ZFC (en effet, si de ZFC on pouvait déduire non-HC, on pourrait aussi déduire non-HC du système ZFC+HC, lequel donnerait alors à la fois HC et non-HC, ce qui serait contradictoire).

Comment Gödel a-t-il obtenu la structure en question ? L'idée de la méthode est analogue à celle souvent utilisée en algèbre où, partant d'une structure qui vérifie par exemple les axiomes de groupe, comme l'ensemble des nombres réels muni de l'opération d'addition, on considère tous les éléments dont l'existence se déduit de celle d'un élément particulier ; ainsi, si l'on choisit le nombre 1, on en déduit la sous-structure constituée de 1, -1, 1+1, 1+1+1, etc., qui est le « sous-groupe engendré par 1 ». Dans cet exemple, ce procédé donne $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

PASSER PAR UN UNIVERS ENSEMBLISTE PLUS RESTREINT

Autrement dit, l'idée est de partir d'une structure vérifiant certains axiomes et d'en déduire une structure plus petite qui les vérifie aussi et qui, éventuellement, a d'autres propriétés intéressantes.

La méthode de Gödel part donc de l'univers V décrit plus haut et vérifiant les axiomes ZFC. Pour définir une sous-structure, qui sera notée L , il s'est inspiré de la définition des V_α en la modifiant légèrement :

$$L_0 = \emptyset;$$

$L_{\alpha+1} = \mathcal{P}_{\text{def}}(L_\alpha)$ si $\alpha+1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α ;

L_β = la réunion de tous les L_α tels que $\alpha < \beta$, si β est un ordinal limite.

Ici, $\mathcal{P}_{\text{def}}(E)$ désigne l'ensemble des parties constructibles de l'ensemble E , c'est-à-dire définissables par une formule – une expression écrite dans le langage formel de la théorie des ensembles et dont les paramètres sont dans E . Si l'on prend, mettons, l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, un exemple simple de partie constructible de $\mathbb{N}$ est l'ensemble X constitué des éléments x de $\mathbb{N}$ tels qu'il existe un y de $\mathbb{N}$ vérifiant $x+y=5$ (tout cela peut se traduire par une formule). On a dans ce cas $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La différence entre $\mathcal{P}_{\text{def}}(E)$ et $\mathcal{P}(E)$ provient de ce que, en général, certaines parties

STRUCTURES ET « CONSISTANCE RELATIVE »

Un résultat de base pour travailler sur les systèmes axiomatiques est le théorème de complétude, que Kurt Gödel a prouvé en 1929 dans sa thèse de doctorat, avant de démontrer ses fameux théorèmes d'incomplétude.

Le théorème de complétude affirme qu'une théorie définie par des axiomes logiques est non contradictoire si et seulement s'il existe au moins une structure qui satisfait tous ses axiomes.

Par exemple, l'axiome « pour tout x , il existe un y tel que $x < y$ » est non contradictoire, car, en considérant la structure $\mathbb{N}$ (les entiers naturels) avec pour relation $<$ la relation d'ordre habituelle sur les entiers, on voit que l'axiome est satisfait.

Dans le cas d'un système d'axiomes plus compliqué, il n'est bien sûr pas aussi facile de proposer une structure satisfaisant le système d'axiomes. Pour la théorie des ensembles, on se rabat sur la méthode

dite « de consistance relative » : on suppose qu'un système S d'axiomes est non contradictoire ; on en déduit, par le théorème de complétude, qu'il existe une structure M satisfaisant tous les axiomes de S ; on modifie M en M' pour que M' vérifie un axiome de plus, noté X ; l'existence de cette structure M' montre que le système $S + X$ est non contradictoire. Cette construction démontre donc l'implication : S est non contradictoire $\Rightarrow S + X$ est non contradictoire.

C'est la méthode utilisée par Kurt Gödel et Paul Cohen pour démontrer que : ZFC est non contradictoire $\Rightarrow$ ZFC + HC est non contradictoire (Gödel, 1938) et que : ZFC est non contradictoire $\Rightarrow$ ZFC + non-HC est non contradictoire (Cohen, 1963).



Kurt Gödel (1906-1978)

d'un ensemble E n'ont pas une définition permettant de les caractériser. Par exemple, il n'existe qu'une infinité dénombrable de parties définissables de $\mathbb{N}$ (car il n'y a qu'une infinité dénombrable de formules), alors qu'il existe une infinité non dénombrable de parties de $\mathbb{N}$.

La réunion de tous les L_α , notée L , est l'« univers des ensembles constructibles ». C'est un univers ensembliste inclus dans V , dans lequel tous les axiomes ZFC sont vrais. Le point important démontré par Gödel est que, dans L , l'hypothèse du continu est vraie. La méthode de Gödel montre donc que, partant d'une structure qui vérifie ZFC, on sait en trouver une sous-structure qui vérifie ZFC+HC ; par conséquent, elle prouve que si ZFC est non contradictoire, alors ZFC+HC est non contradictoire.

Ce résultat de Gödel suggère que l'on pourrait ajouter au système ZFC l'axiome affirmant que tout ensemble est constructible, ce qui s'écrit $V=L$, et alors l'hypothèse du continu serait vraie. L'axiome $V=L$ pourrait donc, à première vue, être l'axiome recherché pour compléter ZFC et lever l'indécidabilité de HC. Mais il faudrait pour cela avoir des arguments forts incitant à l'admettre. L'argument que tout ensemble doit être définissable à partir de ceux qui viennent avant lui est une justification intuitive; Gödel l'a peut-être envisagé lui-même. Malheureusement, nous allons voir que l'idée de prendre $V=L$ comme nouvel axiome n'est finalement pas défendable.

Aux yeux d'un mathématicien convaincu que les ensembles existent et qu'il existe donc une vérité unique les concernant, on ne peut pas envisager d'ajouter comme axiome n'importe quelle formule indécidable de ZFC (une « formule », dans le contexte de la logique, est un énoncé). Un nouvel axiome doit affirmer une propriété dont nous percevons le sens et qui s'impose à partir de l'idée que nous nous faisons des ensembles. Le fait qu'un axiome possible n'introduise pas de contradiction ne suffit pas pour qu'on l'adopte.

RÉALISME SIMPLE OU RÉALISME PLURALISTE ?

En philosophie des mathématiques, les réalistes soutiennent que le monde mathématique existe et que le travail du mathématicien consiste à découvrir les vérités de ce monde. Puisque les théories les plus puissantes et les plus utilisées sont fondées sur les notions ensemblistes et que tout, d'une certaine façon, s'y ramène, il est assez naturel aujourd'hui d'affirmer le réalisme mathématique en le fondant sur la théorie des ensembles, c'est-à-dire en défendant l'idée que les ensembles, et en particulier les ensembles infinis, existent bel et bien.

Face au problème de l'hypothèse du continu (HC)

et de son indécidabilité relativement aux axiomes usuels de la théorie des ensembles, une version du réalisme ensembliste soutient que l'univers des mathématiques existe sous une multitude de formes. Dans certaines, l'hypothèse du continu est vraie, dans d'autres, elle est fausse. Ce « multivers ensembliste » dispenserait de rechercher une valeur de vérité (« vrai » ou « faux ») à l'hypothèse du continu. Hugh Woodin oppose à cette version trop facile de réalisme des arguments techniques montrant que, dans le prétendu multivers, aucune notion de vérité satisfaisante ne trouve place. Pour lui, comme pour Gödel, il n'existe qu'un seul univers ensembliste, dont on doit trouver les bons axiomes, ce à quoi il travaille avec acharnement, en soutenant que la voie ouverte par le « L ultime » a de bonnes chances de régler le problème une fois pour toutes.

L'exemple le plus simple pour le comprendre est ce qui se passe avec le second théorème d'incomplétude de Gödel, publié en 1931. Ce théorème indique que la non-contradiction d'un système S assez puissant pour englober l'arithmétique usuelle (par exemple le système ZFC), si elle est vraie, ne peut pas se démontrer dans le système S lui-même. Cela signifie que l'on peut ajouter à S l'affirmation « S est contradictoire » sans que cela introduise de contradiction. Il serait pourtant absurde de le faire, puisqu'en adoptant et en utilisant le système S , on suppose *a priori* qu'il est non contradictoire !

TENIR COMPTE DES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX

Les critères permettant de juger si une formule (un énoncé) peut être ajoutée ou non comme axiome font l'objet de discussions délicates. Une idée cependant fait l'unanimité : si une formule affirme l'existence de grands ensembles infinis et qu'elle n'introduit pas de contradiction, alors il faut l'accepter. S'il existe vraiment un univers des ensembles, alors celui-ci est aussi grand que cela est possible et il faut donc accepter tout ce qui affirme qu'il est grand.

On connaît depuis longtemps des affirmations exprimant l'existence de très grands ensembles infinis, que l'on dénomme « axiomes de grands cardinaux ». Le premier de ces énoncés est l'axiome de l'infini, selon lequel il existe un ensemble infini (axiome dont un énoncé possible est : « Il existe un ensemble pouvant être mis en bijection avec une de ses parties propres [c'est-à-dire non identiques à lui-même] »). La définition précise de ces axiomes dépasse le cadre de cet article, mais il faut savoir qu'ils sont nombreux et font intervenir divers types de grands ensembles (cardinaux « inaccessibles », cardinaux « mesurables », cardinaux « supercompacts », etc.). Ils jouent dans l'étude de l'infini un rôle dont nous verrons plusieurs aspects (voir l'encadré page 36).

Or un miracle se produit à propos des grands cardinaux. Bien que les propriétés qui les définissent soient sans rapport direct les unes avec les autres, et qu'*a priori* il aurait pu se produire que deux grands cardinaux distincts ne soient pas comparables (c'est-à-dire qu'aucun des deux ne soit plus grand que l'autre), cela ne se produit jamais : les grands cardinaux se rangent en une ligne ordonnée qui va du plus petit vers le plus grand.

Hugh Woodin et de nombreux mathématiciens voient dans ce fait un argument pour croire que les ensembles existent réellement et que ce ne sont pas des fictions : si derrière les formules qui définissent les grands cardinaux ne se trouvait aucune réalité, leur