

Ce résultat de Gödel suggère que l'on pourrait ajouter au système ZFC l'axiome affirmant que tout ensemble est constructible, ce qui s'écrit $V=L$, et alors l'hypothèse du continu serait vraie. L'axiome $V=L$ pourrait donc, à première vue, être l'axiome recherché pour compléter ZFC et lever l'indécidabilité de HC. Mais il faudrait pour cela avoir des arguments forts incitant à l'admettre. L'argument que tout ensemble doit être définissable à partir de ceux qui viennent avant lui est une justification intuitive; Gödel l'a peut-être envisagé lui-même. Malheureusement, nous allons voir que l'idée de prendre $V=L$ comme nouvel axiome n'est finalement pas défendable.

Aux yeux d'un mathématicien convaincu que les ensembles existent et qu'il existe donc une vérité unique les concernant, on ne peut pas envisager d'ajouter comme axiome n'importe quelle formule indécidable de ZFC (une « formule », dans le contexte de la logique, est un énoncé). Un nouvel axiome doit affirmer une propriété dont nous percevons le sens et qui s'impose à partir de l'idée que nous nous faisons des ensembles. Le fait qu'un axiome possible n'introduise pas de contradiction ne suffit pas pour qu'on l'adopte.

L'exemple le plus simple pour le comprendre est ce qui se passe avec le second théorème d'incomplétude de Gödel, publié en 1931. Ce théorème indique que la non-contradiction d'un système S assez puissant pour englober l'arithmétique usuelle (par exemple le système ZFC), si elle est vraie, ne peut pas se démontrer dans le système S lui-même. Cela signifie que l'on peut ajouter à S l'affirmation « S est contradictoire » sans que cela introduise de contradiction. Il serait pourtant absurde de le faire, puisqu'en adoptant et en utilisant le système S , on suppose *a priori* qu'il est non contradictoire!

TENIR COMPTE DES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX

Les critères permettant de juger si une formule (un énoncé) peut être ajoutée ou non comme axiome font l'objet de discussions délicates. Une idée cependant fait l'unanimité: si une formule affirme l'existence de grands ensembles infinis et qu'elle n'introduit pas de contradiction, alors il faut l'accepter. S'il existe vraiment un univers des ensembles, alors celui-ci est aussi grand que cela est possible et il faut donc accepter tout ce qui affirme qu'il est grand.

On connaît depuis longtemps des affirmations exprimant l'existence de très grands ensembles infinis, que l'on dénomme « axiomes de grands cardinaux ». Le premier de ces énoncés est l'axiome de l'infini, selon lequel il existe un ensemble infini (axiome dont un énoncé possible est: « Il existe un ensemble pouvant être mis en bijection avec une de ses parties propres [c'est-à-dire non identiques à lui-même] »). La définition précise de ces axiomes dépasse le cadre de cet article, mais il faut savoir qu'ils sont nombreux et font intervenir divers types de grands ensembles (cardinaux « inaccessibles », cardinaux « mesurables », cardinaux « supercompacts », etc.). Ils jouent dans l'étude de l'infini un rôle dont nous verrons plusieurs aspects (voir l'encadré page 36).

Or un miracle se produit à propos des grands cardinaux. Bien que les propriétés qui les définissent soient sans rapport direct les unes avec les autres, et qu'*a priori* il aurait pu se produire que deux grands cardinaux distincts ne soient pas comparables (c'est-à-dire qu'aucun des deux ne soit plus grand que l'autre), cela ne se produit jamais: les grands cardinaux se rangent en une ligne ordonnée qui va du plus petit vers le plus grand.

Hugh Woodin et de nombreux mathématiciens voient dans ce fait un argument pour croire que les ensembles existent réellement et que ce ne sont pas des fictions: si derrière les formules qui définissent les grands cardinaux ne se trouvait aucune réalité, leur

RÉALISME SIMPLE OU RÉALISME PLURALISTE ?

En philosophie des mathématiques, les réalistes soutiennent que le monde mathématique existe et que le travail du mathématicien consiste à découvrir les vérités de ce monde. Puisque les théories les plus puissantes et les plus utilisées sont fondées sur les notions ensemblistes et que tout, d'une certaine façon, s'y ramène, il est assez naturel aujourd'hui d'affirmer le réalisme mathématique en le fondant sur la théorie des ensembles, c'est-à-dire en défendant l'idée que les ensembles, et en particulier les ensembles infinis, existent bel et bien.

Face au problème de l'hypothèse du continu (HC)

et de son indécidabilité relativement aux axiomes usuels de la théorie des ensembles, une version du réalisme ensembliste soutient que l'univers des mathématiques existe sous une multitude de formes. Dans certaines, l'hypothèse du continu est vraie, dans d'autres, elle est fausse. Ce « multivers ensembliste » dispenserait de rechercher une valeur de vérité (« vrai » ou « faux ») à l'hypothèse du continu. Hugh Woodin oppose à cette version trop facile de réalisme des arguments techniques montrant que, dans le prétendu multivers, aucune notion de vérité satisfaisante ne trouve place. Pour lui, comme pour Gödel, il n'existe qu'un seul univers ensembliste, dont on doit trouver les bons axiomes, ce à quoi il travaille avec acharnement, en soutenant que la voie ouverte par le « L ultime » a de bonnes chances de régler le problème une fois pour toutes.

➤ alignement selon un ordre bien déterminé serait incompréhensible.

On a espéré trouver un axiome de grand cardinal qui ait un effet sur l'hypothèse du continu, mais on a montré plus tard que c'est impossible. La solution du problème posé par l'hypothèse du continu ne peut donc pas provenir directement des grands cardinaux.

Qui plus est, la prise en compte des grands cardinaux condamne sans appel l'axiome $V=L$, évoqué plus haut, comme solution possible à l'énigme de l'hypothèse du continu. En 1961, le mathématicien et informaticien américain Dana Scott a en effet prouvé que si l'on adopte comme axiome $V=L$, alors les cardinaux «mesurables» ne peuvent pas exister.

Ce résultat signifie donc que l'on ne peut pas à la fois adopter tous les axiomes de grands cardinaux, comme on croit nécessaire de le faire, et adopter l'axiome $V=L$. Hugh Woodin n'hésite pas à dire que le résultat de Dana Scott signifie que $V=L$ est une affirmation fausse.

UNE VARIANTE DE L COMPATIBLE AVEC LES GRANDS CARDINAUX ?

Pour trouver une issue, les mathématiciens et les logiciens ont alors considéré des variantes de L . Elles sont fondées sur des définitions utilisant le même principe que pour L : fixer une notion constructive pour passer d'un L_α à un $L_{\alpha+1}$, mais la choisir moins restrictive, de façon que les ensembles L_α soient plus grands que ceux définis par Gödel.

Cette idée a permis de résoudre le problème des cardinaux «mesurables», le logicien américain Robert Solovay ayant conçu en 1976 une version de L qui n'est pas en contradiction avec l'existence d'un tel cardinal. Ce nouveau L est malheureusement en contradiction avec d'autres axiomes de grands cardinaux plus élevés dans la hiérarchie. De ce fait, la variante de $V=L$ de Robert Solovay n'est pas plus recevable que celle de Gödel.

Ce processus d'élargissement de L a été répété plusieurs fois, mais à chaque étape, la nouvelle version de $V=L$ s'est révélée incompatible avec certains axiomes de grands cardinaux. La situation semblait donc bloquée.

En 2010, cependant, une avancée spectaculaire s'est produite. Hugh Woodin a démontré cette année-là que si l'on trouvait une variante de $V=L$ compatible avec l'existence d'un cardinal «supercompact», alors elle serait nécessairement compatible avec tous les axiomes de grands cardinaux.

On recherche donc aujourd'hui ce L miraculeux, dénommé « L ultime». On dispose de pistes sérieuses pour y parvenir, et surtout, on sait, grâce à un autre résultat de Hugh Woodin, que l'axiome $V=L$ ultime aurait pour conséquence que l'hypothèse du continu est vraie.

LE FORCING, UNE TECHNIQUE QUE L'AXIOME $V=L$ ULTIME NEUTRALISERAIT

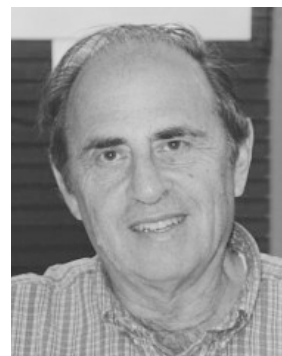
Le forcing est la méthode conçue par Paul Cohen pour démontrer que non- HC (la négation de l'hypothèse du continu) est compatible avec la théorie ZFC. Elle est extrêmement puissante, au point même que c'est gênant : elle permet de montrer non seulement que non- HC est compatible avec la théorie ZFC, mais aussi que HC l'est. Elle démontre donc à elle seule que HC est un énoncé indécidable de la théorie ZFC.

Qui plus est, le forcing s'applique à d'autres questions mathématiques importantes et montre que celles-ci (problème de Whitehead en théorie des groupes, conjecture de Kaplansky en analyse, problème de Suslin en combinatoire, conjecture de Borel en théorie de la mesure...) sont indécidables dans la théorie ZFC.

Ces indécidabilités confirment qu'il faut ajouter des axiomes au système ZFC, et les ajouter si possible de façon à rendre inopérant le forcing.

Un axiome X rend inopérant le forcing si l'on ne peut plus démontrer qu'à la fois HC (ou l'un des autres problèmes cités) et sa négation sont compatibles avec le système ZFC + X , autrement dit si l'ajout de X aux axiomes ZFC fixe une valeur de vérité à HC (ou à l'un des problèmes cités).

Hugh Woodin a pu établir que l'axiome $V=L$ ultime qu'il envisage serait compatible avec les axiomes de grands cardinaux, mais aussi qu'il rendrait inopérant le forcing. Ce serait donc un axiome en tout point satisfaisant pour supprimer le flou que ZFC laisse persister. La nouvelle théorie des ensembles démontrerait ainsi que l'hypothèse du continu est vraie, et serait d'après lui la plus raisonnable des théories des ensembles.



Paul Cohen (1934-2007)

Un argument supplémentaire soutient ce $V=L$ ultime : Hugh Woodin a montré en 2015 que cet axiome rendrait inopérant le forcing. Expliquons de quoi il s'agit. Pour démontrer que non- HC est compatible avec la théorie ZFC, la méthode de Paul Cohen s'appuie sur une technique nommée «forcing». Elle consiste, partant d'une structure vérifiant les axiomes ZFC, à en construire une autre qui vérifie ZFC + non- HC . Cette méthode est cependant très puissante et permet bien d'autres choses. Notamment, le forcing permet de construire, comme la méthode de Gödel, une structure qui vérifie ZFC et HC . En clair, le forcing est une méthode qui, à elle seule, montre l'indécidabilité de l'hypothèse du continu dans le système ZFC. Mieux, elle s'applique aussi à d'autres énoncés de mathématiques en algèbre, en analyse, etc., dont elle