

> alignement selon un ordre bien déterminé serait incompréhensible.

On a espéré trouver un axiome de grand cardinal qui ait un effet sur l'hypothèse du continu, mais on a montré plus tard que c'est impossible. La solution du problème posé par l'hypothèse du continu ne peut donc pas provenir directement des grands cardinaux.

Qui plus est, la prise en compte des grands cardinaux condamne sans appel l'axiome $V=L$, évoqué plus haut, comme solution possible à l'énigme de l'hypothèse du continu. En 1961, le mathématicien et informaticien américain Dana Scott a en effet prouvé que si l'on adopte comme axiome $V=L$, alors les cardinaux «mesurables» ne peuvent pas exister.

Ce résultat signifie donc que l'on ne peut pas à la fois adopter tous les axiomes de grands cardinaux, comme on croit nécessaire de le faire, et adopter l'axiome $V=L$. Hugh Woodin n'hésite pas à dire que le résultat de Dana Scott signifie que $V=L$ est une affirmation fausse.

UNE VARIANTE DE L COMPATIBLE AVEC LES GRANDS CARDINAUX?

Pour trouver une issue, les mathématiciens et les logiciens ont alors considéré des variantes de L . Elles sont fondées sur des définitions utilisant le même principe que pour L : fixer une notion constructive pour passer d'un L_α à un $L_{\alpha+1}$, mais la choisir moins restrictive, de façon que les ensembles L_α soient plus grands que ceux définis par Gödel.

Cette idée a permis de résoudre le problème des cardinaux «mesurables», le logicien américain Robert Solovay ayant conçu en 1976 une version de L qui n'est pas en contradiction avec l'existence d'un tel cardinal. Ce nouveau L est malheureusement en contradiction avec d'autres axiomes de grands cardinaux plus élevés dans la hiérarchie. De ce fait, la variante de $V=L$ de Robert Solovay n'est pas plus recevable que celle de Gödel.

Ce processus d'élargissement de L a été répété plusieurs fois, mais à chaque étape, la nouvelle version de $V=L$ s'est révélée incompatible avec certains axiomes de grands cardinaux. La situation semblait donc bloquée.

En 2010, cependant, une avancée spectaculaire s'est produite. Hugh Woodin a démontré cette année-là que si l'on trouvait une variante de $V=L$ compatible avec l'existence d'un cardinal «supercompact», alors elle serait nécessairement compatible avec tous les axiomes de grands cardinaux.

On recherche donc aujourd'hui ce L miraculeux, dénommé « L ultime». On dispose de pistes sérieuses pour y parvenir, et surtout, on sait, grâce à un autre résultat de Hugh Woodin, que l'axiome $V=L$ ultime aurait pour conséquence que l'hypothèse du continu est vraie.

LE FORCING, UNE TECHNIQUE QUE L'AXIOME $V=L$ ULTIME NEUTRALISERAIT

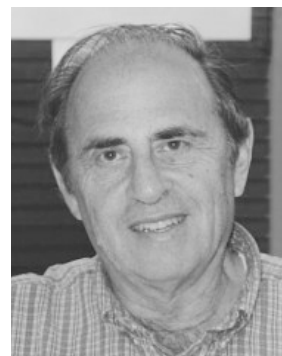
Le forcing est la méthode conçue par Paul Cohen pour démontrer que non-HC (la négation de l'hypothèse du continu) est compatible avec la théorie ZFC. Elle est extrêmement puissante, au point même que c'est gênant : elle permet de montrer non seulement que non-HC est compatible avec la théorie ZFC, mais aussi que HC l'est. Elle démontre donc à elle seule que HC est un énoncé indécidable de la théorie ZFC.

Qui plus est, le forcing s'applique à d'autres questions mathématiques importantes et montre que celles-ci (problème de Whitehead en théorie des groupes, conjecture de Kaplansky en analyse, problème de Suslin en combinatoire, conjecture de Borel en théorie de la mesure...) sont indécidables dans la théorie ZFC.

Ces indécidabilités confirment qu'il faut ajouter des axiomes au système ZFC, et les ajouter si possible de façon à rendre inopérant le forcing.

Un axiome X rend inopérant le forcing si l'on ne peut plus démontrer qu'à la fois HC (ou l'un des autres problèmes cités) et sa négation sont compatibles avec le système ZFC + X , autrement dit si l'ajout de X aux axiomes ZFC fixe une valeur de vérité à HC (ou à l'un des problèmes cités).

Hugh Woodin a pu établir que l'axiome $V=L$ ultime qu'il envisage serait compatible avec les axiomes de grands cardinaux, mais aussi qu'il rendrait inopérant le forcing. Ce serait donc un axiome en tout point satisfaisant pour supprimer le flou que ZFC laisse persister. La nouvelle théorie des ensembles démontrerait ainsi que l'hypothèse du continu est vraie, et serait d'après lui la plus raisonnable des théories des ensembles.



Paul Cohen (1934-2007)

Un argument supplémentaire soutient ce $V=L$ ultime: Hugh Woodin a montré en 2015 que cet axiome rendrait inopérant le forcing. Expliquons de quoi il s'agit. Pour démontrer que non-HC est compatible avec la théorie ZFC, la méthode de Paul Cohen s'appuie sur une technique nommée «forcing». Elle consiste, partant d'une structure vérifiant les axiomes ZFC, à en construire une autre qui vérifie ZFC + non-HC. Cette méthode est cependant très puissante et permet bien d'autres choses. Notamment, le forcing permet de construire, comme la méthode de Gödel, une structure qui vérifie ZFC et HC. En clair, le forcing est une méthode qui, à elle seule, montre l'indécidabilité de l'hypothèse du continu dans le système ZFC. Mieux, elle s'applique aussi à d'autres énoncés de mathématiques en algèbre, en analyse, etc., dont elle

montre l'indécidabilité dans la théorie ZFC (voir l'encadré ci-dessous).

Pour Hugh Woodin, la situation créée par ces indécidables est très insatisfaisante: qu'est donc cette science – les mathématiques fondées sur les axiomes ZFC – incapable de dire, pour nombre de ses énoncés, s'ils sont vrais ou faux? Cette situation suggère un nouveau critère pour juger si l'ajout au système ZFC d'un axiome X est bienvenu ou non: l'ajout sera bienvenu s'il rend inopérant le forcing de Paul Cohen, autrement dit si, en ajoutant X à ZFC, le forcing ne permet plus de choisir comme on veut entre l'hypothèse du continu et sa négation, ou, plus généralement, entre A et non-A pour les énoncés mathématiques A que le forcing montre indécidables dans la théorie ZFC.

Or l'axiome $V=L$ ultime rendrait inopérant le forcing, comme Hugh Woodin l'a montré. Avec le L ultime, une série de questions indécidables dans la théorie ZFC prendraient donc une valeur de vérité déterminée. Ainsi, le $V=L$ ultime attendu, qui serait compatible avec l'existence d'un cardinal supercompact, ne serait pas seulement un axiome compatible avec tous les axiomes de grands cardinaux (c'est une exigence *a priori*). Il limiterait aussi

l'impuissance des mathématiques fondées sur ZFC à déterminer, pour toute une classe intéressante d'énoncés, si ceux-ci sont vrais ou faux. C'est là un puissant faisceau de raisons pour adopter l'axiome $V=L$ ultime.

À LA RECHERCHE DU L ULTIME

La situation n'est pas réglée pour autant. En effet, il reste à trouver la bonne définition du L ultime, telle que l'axiome $V=L$ ultime soit compatible avec l'existence des grands cardinaux supercompacts. Plusieurs pistes sont aujourd'hui en cours d'exploration et l'on peut espérer que les mathématiciens disposeront bientôt d'un argument sérieux qui leur permettra enfin d'affirmer que l'hypothèse du continu est vraie, et qui lèvera aussi l'indécidabilité d'autres questions mathématiques.

Ces développements survenus depuis une dizaine d'années sont remarquables; ils confirment que la compréhension de l'infini est un travail mathématique qui progresse régulièrement et sensiblement. On constate que la découverte des vérités mathématiques ne consiste pas seulement à élaborer des démonstrations à partir d'axiomes évidents, faciles à formuler et jamais ➤

le CNRS a 80 ans! masterclass

— vendredi 25, samedi 26, dimanche 27 octobre de 14h à 19h

cité
sciences
et industrie

Nouveau(x) monde(s), le Forum du CNRS

Pour célébrer ses 80 ans le CNRS propose une édition spéciale de son Forum. Des scientifiques, des artistes et des auteurs sont invités à répondre à la question: comment la recherche peut réparer, réinventer ou ré-enchanter notre monde ?

des masterclass à ne pas manquer avec:

En solo: Alain Aspect, Gérard Berry, Monica Brînzei, Alain Connes, Thomas Ebbesen, Albert Fert, Jean-Gabriel Ganascia, Julie Grollier, Serge Haroche, Edith Heard, Jean-François Lutz, Alain Prochiantz, Jean-Loup Puget, Jacques Stern

En duo: Barbara Cassin et Sophie Calle, Alexandre Gefen et Minh Tran Huy, Jacques Maddaluno et Pierre Buraglio, Frédéric Keck et Hervé di Rosa, Roberto Casati et Larry Kagan

Cité des sciences et de l'industrie
30, avenue Corentin-Cariou - 75019 Paris
M Porte de la Villette ① 3b Cité des sciences et de l'industrie

Informations sur cite-sciences.fr

PROPOSÉ PAR



AVEC LE SOUTIEN DE

SCIENCE

© CNRS / Emmanuelle Lhuissier / Cofina / SCV / Ina / CNRS Photothèque