

montre l'indécidabilité dans la théorie ZFC (voir l'encadré ci-dessous).

Pour Hugh Woodin, la situation créée par ces indécidables est très insatisfaisante: qu'est donc cette science – les mathématiques fondées sur les axiomes ZFC – incapable de dire, pour nombre de ses énoncés, s'ils sont vrais ou faux? Cette situation suggère un nouveau critère pour juger si l'ajout au système ZFC d'un axiome X est bienvenu ou non: l'ajout sera bienvenu s'il rend inopérant le forcing de Paul Cohen, autrement dit si, en ajoutant X à ZFC, le forcing ne permet plus de choisir comme on veut entre l'hypothèse du continu et sa négation, ou, plus généralement, entre A et non-A pour les énoncés mathématiques A que le forcing montre indécidables dans la théorie ZFC.

Or l'axiome $V=L$ ultime rendrait inopérant le forcing, comme Hugh Woodin l'a montré. Avec le L ultime, une série de questions indécidables dans la théorie ZFC prendraient donc une valeur de vérité déterminée. Ainsi, le $V=L$ ultime attendu, qui serait compatible avec l'existence d'un cardinal supercompact, ne serait pas seulement un axiome compatible avec tous les axiomes de grands cardinaux (c'est une exigence *a priori*). Il limiterait aussi

l'impuissance des mathématiques fondées sur ZFC à déterminer, pour toute une classe intéressante d'énoncés, si ceux-ci sont vrais ou faux. C'est là un puissant faisceau de raisons pour adopter l'axiome $V=L$ ultime.

À LA RECHERCHE DU L ULTIME

La situation n'est pas réglée pour autant. En effet, il reste à trouver la bonne définition du L ultime, telle que l'axiome $V=L$ ultime soit compatible avec l'existence des grands cardinaux supercompacts. Plusieurs pistes sont aujourd'hui en cours d'exploration et l'on peut espérer que les mathématiciens disposeront bientôt d'un argument sérieux qui leur permettra enfin d'affirmer que l'hypothèse du continu est vraie, et qui lèvera aussi l'indécidabilité d'autres questions mathématiques.

Ces développements survenus depuis une dizaine d'années sont remarquables; ils confirment que la compréhension de l'infini est un travail mathématique qui progresse régulièrement et sensiblement. On constate que la découverte des vérités mathématiques ne consiste pas seulement à élaborer des démonstrations à partir d'axiomes évidents, faciles à formuler et jamais ➤

le CNRS a 80 ans!
masterclass

— vendredi 25, samedi 26, dimanche 27 octobre de 14h à 19h

cité
sciences et industrie

PROPOSÉ PAR AVEC LE SOUTIEN DE

© Cyril Fraillon / Ego / Viate / J. L. Emerson / Luitz / Cédric / SCV / Inria / CNRS Photothèque

Nouveau(x) monde(s), le Forum du CNRS

Pour célébrer ses 80 ans le CNRS propose une édition spéciale de son Forum. Des scientifiques, des artistes et des auteurs sont invités à répondre à la question: comment la recherche peut réparer, réinventer ou ré-enchanter notre monde ?

des masterclass à ne pas manquer avec:

En solo: Alain Aspect, Gérard Berry, Monica Brînzei, Alain Connes, Thomas Ebbesen, Albert Fert, Jean-Gabriel Ganascia, Julie Grollier, Serge Haroche, Edith Heard, Jean-François Lutz, Alain Prochiantz, Jean-Loup Puget, Jacques Stern

En duo: Barbara Cassin et Sophie Calle, Alexandre Gefen et Minh Tran Huy, Jacques Maddaluno et Pierre Buraglio, Frédéric Keck et Hervé di Rosa, Roberto Casati et Larry Kagan

Cité des sciences et de l'industrie
30, avenue Corentin-Cariou - 75019 Paris
M Porte de la Villette ① 3b Cité des sciences et de l'industrie

Informations sur cite-sciences.fr

HUGH WOODIN ET LES GRANDS CARDINAUX

Pour Hugh Woodin (*ci-contre*), la hiérarchie des grands cardinaux (de grands ensembles infinis dont l'existence est posée par des axiomes complémentaires aux axiomes ZFC usuels de la théorie des ensembles) est aussi intrinsèque et absolue que celle des nombres entiers eux-mêmes. C'est selon lui une découverte majeure. Il est convaincu que les axiomes des grands cardinaux ne conduiront jamais à une contradiction, ce qui a pour conséquence que les énoncés qu'ils permettent de prouver sur les nombres entiers sont vrais, et que ces axiomes ont donc des conséquences concrètes, physiques. Il affirmait ainsi (dans « *The transfinite universe* », chapitre du livre collectif *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics*, paru en 2011) : « Dans les dix mille ans à venir, on ne trouvera aucune contradiction au sein de ces théories [affirmant l'existence de grands cardinaux]. Il s'agit d'une prédiction spécifique et non ambiguë sur l'univers physique. Elle ne se réduit à aucune vérité connue antérieurement. Cette prédiction découle du développement de la théorie des ensembles au cours des cinquante dernières années [...]. Elle se fonde sur ma conviction que la conception de l'univers transfini est pleinement sensée. Je fais cette prédiction indépendamment de toute spéculation sur les dispositifs informatiques susceptibles d'être développés au cours des dix mille prochaines années et qui pourraient avoir des effets sur l'efficacité de la recherche en mathématiques. »



➤ remis en cause, mais qu'elle est aussi le résultat d'une discussion et d'un affinement de notre conception de l'infini.

Cette discussion se nourrit à la fois de théorèmes et de points de vue qui renforcent notre intuition. Certaines options s'offrant aux mathématiciens sont ainsi éliminées non pas parce qu'on démontre qu'elles sont logiquement absurdes, mais parce qu'elles ne sont pas intellectuellement satisfaisantes – comme adopter brutalement l'axiome $V=L$. L'infini mathématique se montre intelligible et, comme pour d'autres sciences, nos connaissances dans ce domaine s'enrichissent d'année en année.

DES TRAVAUX ABSTRAITS AUX CONSÉQUENCES CONCRÈTES

Par ailleurs, considérant ces avancées de la théorie des ensembles depuis un demi-siècle, Hugh Woodin défend l'idée que la théorie des grands cardinaux et les travaux sur l'axiomatisation complémentaire de ZFC ne sont pas un travail purement abstrait, hors du monde. La compréhension nouvelle qu'ils donnent de l'infini a, selon lui, des « conséquences physiques ». Expliquons son point de vue.

Les axiomes de grands cardinaux se classent les uns par rapport aux autres et quand un axiome X est plus fort que l'axiome Y , alors X permet de prouver l'énoncé affirmant « le système $ZFC+Y$ est non contradictoire ». Or un tel énoncé s'exprime dans la théorie par une suite de symboles, et savoir s'il se

démontre n'est qu'une question combinatoire, que l'on sait toujours traduire en question portant sur les nombres entiers. Même si c'est étonnant, les axiomes de grands cardinaux ont donc des conséquences sur ce qu'on sait démontrer concernant les nombres entiers : l'infini joue sur le fini et plus on a d'infinis, plus on en sait sur le fini.

Ces effets sur les énoncés arithmétiques sont, d'une certaine façon, des effets physiquement testables. Penser qu'un axiome de grand cardinal X est acceptable – et Hugh Woodin clame que c'est le cas de beaucoup d'entre eux – signifie qu'en faisant fonctionner la théorie $ZFC+X$, on est certain qu'on ne tombera jamais sur une contradiction.

Or faire fonctionner une théorie, c'est dérouler les conséquences de ses axiomes, tâche que l'on peut confier à une machine. Croire en l'existence d'un grand cardinal, c'est donc croire que les machines utilisant le système ZFC complété par l'axiome correspondant à ce grand cardinal ne produiront jamais de résultats contradictoires tels que $0=1$. C'est donc un énoncé qui porte sur le monde physique. Il provient uniquement de notre compréhension de l'infini. En d'autres termes, les progrès de la théorie des ensembles enrichissent ce que nous pouvons affirmer de l'infini et donc du monde physique. Ainsi, ces avancées des mathématiciens et des logiciens tissent un fil qui relie l'infini le plus grand à la réalité matérielle, allant des objets les plus abstraits aux objets les plus concrets. ■

BIBLIOGRAPHIE

H. Woodin, **In search of ultimate-L**, *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 23(1), pp. 1-109, 2017.

J. Cavitt, **Set-theoretic geology, the ultimate inner model, and new axioms**, thèse soutenue à l'université Harvard, 2017.

C. Rittberg, **How Woodin changed his mind : New thoughts on the Continuum Hypothesis**, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 69(2), pp. 125-151, 2015.

Conférence filmée de Hugh Woodin, 2015 : <https://www.youtube.com/watch?v=nVF4N1Ix5WI>

M. Heller et H. Woodin, **Infinity : New Research Frontiers**, Cambridge University Press, 2011.

H. Woodin, **Strong axioms of infinity and the search for V**, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010*, World Scientific, pp. 504-528, 2011.

DES SUJETS D'ACTUALITÉ, DES LECTURES CAPTIVANTES



Michio KAKU

Physicien et futurologue, cofondateur de la théorie des cordes.

1^{re} éd. 2019 • 448 p. • 9782807322332 • **24 €**

Les dernières avancées et perspectives sur le cerveau humain.



Jamie BARTLETT

Journaliste et expert britannique en médias sociaux et technologie.

1^{re} éd. 2019 • 224 p. • 9782807322301 • **19,50 €**

Un essai passionnant sur les enjeux de la révolution numérique



Christian de PERTHUIS

Créateur de la Chaire d'économie du climat à l'université Paris Dauphine.

1^{re} éd. 2019 • 256 p. • 9782807322097 • **19,50 €**

Une course contre la montre pour le climat



William NORDHAUS

Prix Nobel d'économie 2018 pour ses travaux sur l'économie du climat.

1^{re} éd. 2019 • 352 p. • 9782807325296 • **24,90 €**

Risques, incertitudes et solutions économiques face à un monde en réchauffement.



L'AUTEUR



JAMES E. DAHLGREN
maître de conférences dans le département
Wallace H. Coulter d'ingénierie biomédicale,
à l'institut de technologie de Géorgie et
à l'université Emory, à Atlanta, aux États-Unis

L'ESSENTIEL

> Les propriétés uniques de l'ADN le rendent idéal pour le stockage d'informations de toutes sortes, comme des livres ou des films.

> Dans l'ingénierie biomédicale, on l'utilise par ailleurs comme un code-barres permettant de réaliser une multitude d'expériences simultanément, ce qui permet de générer des données à des vitesses sans précédent.

> Cette technique offre la possibilité de tester plus rapidement et à moindre coût des pistes thérapeutiques, comme des traitements contre le cancer ou l'efficacité de vecteurs de médicaments.

Une vidéo stockée dans l'ADN

Un cheval au galop enregistré dans l'ADN d'une bactérie, c'est possible !
Dispositif de stockage numérique, outil de gestion de données lors d'expériences, code-barres... l'ADN endosse des rôles de plus en plus variés.

Des milliards d'années avant que les humains inventent le premier disque dur, l'information la plus précieuse – le patrimoine génétique – avait déjà son moyen de stockage : l'ADN. Au fil de l'évolution, toute forme connue de vie sur Terre s'est retrouvée dotée de cette molécule. Aujourd'hui, grâce aux récentes percées techniques qui nous permettent de lire et d'écrire l'ADN, des scientifiques voient dans cette vieille molécule un moyen de stocker d'autres types d'informations : celles produites à vitesse exponentielle à l'ère du *big data*.

L'idée de recourir à l'ADN pour stocker des informations autres que les gènes n'est pas neuve. Après tout, les 0 et les 1 du code informatique se heurtent aux limites de la physique. Un événement récent l'illustre : Myspace, un réseau social qui fut un jour l'un des plus populaires, a perdu les données d'une décennie au cours d'une migration de serveur. Assurer la protection des données à long terme, comme celles d'un site web qui redémarre après une longue période d'arrêt, est difficile quand les techniques employées sont vulnérables. En outre, les quantités d'énergie requises sont considérables.

Or l'ADN a le potentiel de contourner ces problèmes. Sa structure en double hélice est parfaitement adaptée au stockage d'information,

pour plusieurs raisons. D'abord, l'ADN est doté d'une très grande stabilité dans le temps : l'intégrité et la précision des informations sont donc garanties à long terme. Conservé dans un environnement froid et sec, l'ADN résiste plusieurs dizaines de milliers d'années, comme l'ont montré, en 2010, Svante Pääbo, à l'institut Max-Planck pour l'anthropologie évolutionniste, à Leipzig, et ses collègues en analysant le génome d'un spécimen de Néandertal à partir d'un os. Mais l'aspect le plus fascinant de la double hélice réside dans son exceptionnelle capacité de densification. Chaque cellule du corps humain contient un noyau de diamètre 10 micromètres. Pourtant, si l'on déroulait l'ADN qu'il renferme, il atteindrait 2 mètres. Mises bout à bout, les molécules d'ADN de toutes les cellules d'un individu mesureraient quelque 100 000 milliards de mètres. En 2014, les scientifiques ont calculé que l'archivage de 455 exaoctets (455×10^{18} octets) de données tiendrait, en théorie, dans un gramme d'ADN. Cette densité de stockage est 1 million de fois plus importante que celle des disques durs.

Malgré ces avantages, des obstacles scientifiques, économiques et éthiques doivent être levés avant que l'ADN ne remplace les traditionnels disques durs. Néanmoins, il commence déjà à faire ses preuves en tant que technologie de l'information. Ainsi, en 2016, >