

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

LA PHYSIQUE A-T-ELLE BESOIN DES NOMBRES RÉELS?

L'usage des nombres réels pour représenter des grandeurs physiques semble aller de soi. Pourtant, ces nombres ne sont pas aussi réels que le suggère leur nom, et ils engendrent parfois illusions et faux espoirs.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

L'usage des nombres réels en physique et plus généralement dans les sciences a pour origine la géométrie, avec sa conception idéalisée des points d'une droite, d'un plan ou de l'espace. Les nombres réels, dont la structure constitue ce qu'on dénomme «le continu», possèdent de formidables propriétés. En voici quatre.

– Entre deux nombres réels x et y tels que $x < y$, il y a toujours le nombre réel $(x + y)/2$ et une infinité d'autres, dont tous ceux donnés par la formule $(nx + my)/(n + m)$ où n et m sont deux entiers positifs :

$$x = (nx + mx)/(n + m) \\ < (nx + my)/(n + m) < (ny + my)/(n + m) = y.$$

– Si une suite de nombres réels $x_1, x_2, x_3, \dots$ est croissante et majorée (tous les x_i sont inférieurs à un nombre fixé M), alors elle converge vers une limite qui est un nombre réel. Cette propriété permet de savoir qu'il existe un nombre réel x dont le carré est 2; on le note $\sqrt{2}$. Cette seconde propriété est importante, car la première propriété qu'ont aussi les nombres rationnels (les quotients de deux entiers) ne permet pas de démontrer qu'un tel nombre existe; d'ailleurs, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

– Les opérations d'addition et de multiplication entre nombres réels ont des propriétés simples et bien commodes, qui en font ce que les mathématiciens nomment un «corps». On a ainsi $x + y = y + x$, $x(y + z) = xy + xz$ et bien d'autres égalités utiles.

– La relation d'ordre sur les nombres réels est totale, c'est-à-dire que deux nombres

distincts x et y étant donnés, l'un domine l'autre: on a soit $x < y$, soit $y < x$.

Ces propriétés ont servi de base pour le calcul différentiel et les réels constituent un outil commode pour représenter l'espace physique (chaque point est déterminé par trois nombres réels), pour décrire le temps, les masses, les vitesses, et plus généralement les grandeurs physiques: on formule les lois de la nature en utilisant les nombres réels. La plupart des physiciens utilisent ces nombres sans se poser de question. Pourtant, ils créent une situation insatisfaisante sous plusieurs aspects.

LES UNITÉS IGNORÉES ET LA PRÉCISION LIMITÉE

David Ruelle, membre de l'Académie des sciences, dit que les réels du physicien sont différents de ceux du mathématicien à cause de deux points de divergence grave:

«(a) Les nombres utilisés en physique ont une dimension. Cela signifie qu'ils correspondent à une mesure faite en une unité donnée, par exemple le centimètre pour une longueur, le degré Celsius ou le kelvin pour une température, le centimètre par seconde pour une vitesse, etc. [...] Une formule physique qu'un mathématicien considérerait convenable pourrait être fermement rejetée par un physicien pour une incorrection concernant les unités. (b) Les nombres utilisés en physique ne peuvent être définis qu'avec une précision limitée, car ils proviennent de mesures opérées en utilisant une unité qui n'est définie qu'avec une précision limitée et dans le cadre de théories à l'applicabilité