

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

LA PHYSIQUE A-T-ELLE BESOIN DES NOMBRES RÉELS?

L'usage des nombres réels pour représenter des grandeurs physiques semble aller de soi. Pourtant, ces nombres ne sont pas aussi réels que le suggère leur nom, et ils engendrent parfois illusions et faux espoirs.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

L'usage des nombres réels en physique et plus généralement dans les sciences a pour origine la géométrie, avec sa conception idéalisée des points d'une droite, d'un plan ou de l'espace. Les nombres réels, dont la structure constitue ce qu'on dénomme «le continu», possèdent de formidables propriétés. En voici quatre.

– Entre deux nombres réels x et y tels que $x < y$, il y a toujours le nombre réel $(x + y)/2$ et une infinité d'autres, dont tous ceux donnés par la formule $(nx + my)/(n + m)$ où n et m sont deux entiers positifs :

$$x = (nx + mx)/(n + m) \\ < (nx + my)/(n + m) < (ny + my)/(n + m) = y.$$

– Si une suite de nombres réels $x_1, x_2, x_3, \dots$ est croissante et majorée (tous les x_i sont inférieurs à un nombre fixé M), alors elle converge vers une limite qui est un nombre réel. Cette propriété permet de savoir qu'il existe un nombre réel x dont le carré est 2; on le note $\sqrt{2}$. Cette seconde propriété est importante, car la première propriété qu'ont aussi les nombres rationnels (les quotients de deux entiers) ne permet pas de démontrer qu'un tel nombre existe; d'ailleurs, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

– Les opérations d'addition et de multiplication entre nombres réels ont des propriétés simples et bien commodes, qui en font ce que les mathématiciens nomment un «corps». On a ainsi $x + y = y + x$, $x(y + z) = xy + xz$ et bien d'autres égalités utiles.

– La relation d'ordre sur les nombres réels est totale, c'est-à-dire que deux nombres

distincts x et y étant donnés, l'un domine l'autre: on a soit $x < y$, soit $y < x$.

Ces propriétés ont servi de base pour le calcul différentiel et les réels constituent un outil commode pour représenter l'espace physique (chaque point est déterminé par trois nombres réels), pour décrire le temps, les masses, les vitesses, et plus généralement les grandeurs physiques: on formule les lois de la nature en utilisant les nombres réels. La plupart des physiciens utilisent ces nombres sans se poser de question. Pourtant, ils créent une situation insatisfaisante sous plusieurs aspects.

LES UNITÉS IGNORÉES ET LA PRÉCISION LIMITÉE

David Ruelle, membre de l'Académie des sciences, dit que les réels du physicien sont différents de ceux du mathématicien à cause de deux points de divergence grave:

«(a) Les nombres utilisés en physique ont une dimension. Cela signifie qu'ils correspondent à une mesure faite en une unité donnée, par exemple le centimètre pour une longueur, le degré Celsius ou le kelvin pour une température, le centimètre par seconde pour une vitesse, etc. [...] Une formule physique qu'un mathématicien considérerait convenable pourrait être fermement rejetée par un physicien pour une incorrection concernant les unités. (b) Les nombres utilisés en physique ne peuvent être définis qu'avec une précision limitée, car ils proviennent de mesures opérées en utilisant une unité qui n'est définie qu'avec une précision limitée et dans le cadre de théories à l'applicabilité

CE QUI N'A PAS DE SENS POUR UN PHYSICIEN

Les nombres réels utilisés en physique ont des propriétés que les mathématiciens jugent importantes et qui, pourtant, n'ont pas vraiment de contrepartie physique. En voici quelques illustrations.

On mesure les distances et les durées avec des nombres réels, alors que ceux-ci ne sont jamais connus qu'avec une précision finie (rarement plus de 10 décimales). Les autres décimales, en quelque sorte cachées, ont-elles un sens ? Ce n'est pas certain, mais alors pourquoi se référer au continu des nombres réels pour parler de distance et de durée ?

L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable, de même, tout simplement, que l'intervalle des nombres réels entre 0 et 1 : on ne peut pas mettre les entiers en correspondance un à un avec ces nombres. Cette propriété des nombres réels, importante pour les mathématiciens, n'a aucune traduction en physique.

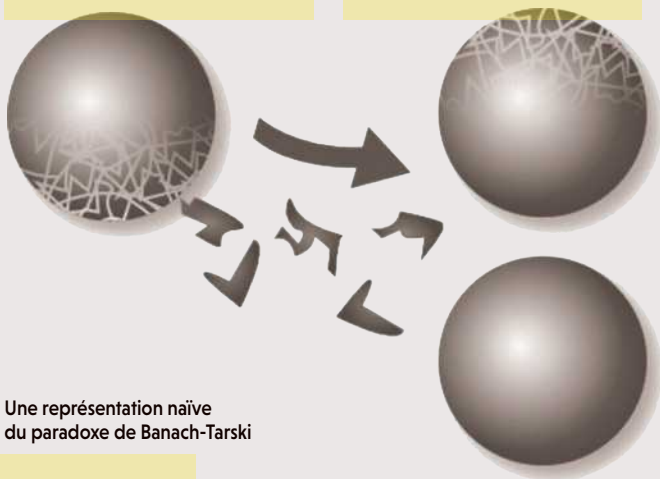
L'axiome du choix indique qu'à toute collection E d'ensembles non vides, par exemple $E = \{\{1, 2\}, \{a, b, c\}, \{z, y\}\}$,

correspond au moins un ensemble de choix C ayant un élément commun avec chaque ensemble de E . L'axiome paraît évident, mais il engendre des situations gênantes. Pour notre exemple, $C = \{2, b, z\}$ convient. Cependant, à partir de l'idée que l'espace est défini par des triplets de nombres réels, on déduit de l'axiome du choix qu'une boule de rayon 1 se décompose en cinq ensembles de points, que l'on peut déplacer sans les déformer pour recomposer deux boules de rayon 1. Ce paradoxe de la multiplication miraculeuse des boules, nommé « paradoxe de Banach-Tarski » (voir www.madore.org/~david/math/bantar.pdf), n'a évidemment aucune traduction dans le monde physique et il s'oppose à l'intuition la plus élémentaire que nous avons de l'espace et à la loi de conservation de la masse.

L'espace mathématique de la géométrie euclidienne s'étend infiniment loin, alors que les physiciens et cosmologistes n'affirment rien de définitif sur cette question pour l'espace physique.



Stefan Banach (1892-1945) était un mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle, dont il est l'un des fondateurs.



Une représentation naïve du paradoxe de Banach-Tarski



Alfred Tarski (1901-1983) était un logicien et philosophe polonais. Il a vécu et travaillé aux États-Unis depuis le début de la Seconde Guerre mondiale, en 1939.

limitée. Il s'ensuit que l'affirmation mathématique "un nombre réel est rationnel, ou irrationnel" n'a pas de sens pour un physicien.»

Ajoutons qu'un mathématicien accorde une grande importance à l'idée que l'infini des nombres réels est plus grand que l'infini dénombrable des nombres entiers et des nombres rationnels, alors que pour le physicien cela ne correspond à rien de concret.

UNE PHYSIQUE ÉLÉGANTE, MAIS INEXACTE !

Le physicien et mathématicien Roger Penrose, professeur émérite à l'université d'Oxford, exprime aussi ses doutes : « Les nombres réels se réfèrent à une idéalisation mathématique plutôt qu'à une quantité physique objective et réelle. Le système des nombres réels a la propriété, par exemple, qu'entre deux >