

CE QUI N'A PAS DE SENS POUR UN PHYSICIEN

1

Les nombres réels utilisés en physique ont des propriétés que les mathématiciens jugent importantes et qui, pourtant, n'ont pas vraiment de contrepartie physique. En voici quelques illustrations.

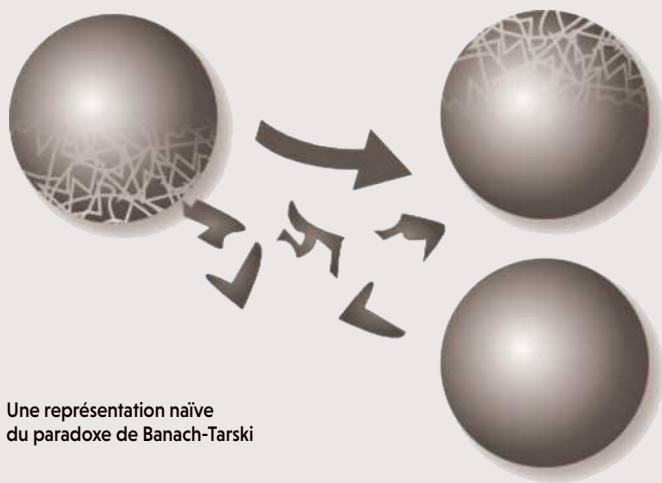
On mesure les distances et les durées avec des nombres réels, alors que ceux-ci ne sont jamais connus qu'avec une précision finie (rarement plus de 10 décimales). Les autres décimales, en quelque sorte cachées, ont-elles un sens ? Ce n'est pas certain, mais alors pourquoi se référer au continu des nombres réels pour parler de distance et de durée ?

L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable, de même, tout simplement, que l'intervalle des nombres réels entre 0 et 1 : on ne peut pas mettre les entiers en correspondance un à un avec ces nombres. Cette propriété des nombres réels, importante pour les mathématiciens, n'a aucune traduction en physique.

L'axiome du choix indique qu'à toute collection E d'ensembles non vides, par exemple $E = \{\{1, 2\}, \{a, b, c\}, \{z, y\}\}$,

correspond au moins un ensemble de choix C ayant un élément commun avec chaque ensemble de E . L'axiome paraît évident, mais il engendre des situations gênantes. Pour notre exemple, $C = \{2, b, z\}$ convient. Cependant, à partir de l'idée que l'espace est défini par des triplets de nombres réels, on déduit de l'axiome du choix qu'une boule de rayon 1 se décompose en cinq ensembles de points, que l'on peut déplacer sans les déformer pour recomposer deux boules de rayon 1. Ce paradoxe de la multiplication miraculeuse des boules, nommé « paradoxe de Banach-Tarski » (voir www.madore.org/~david/math/bantar.pdf), n'a évidemment aucune traduction dans le monde physique et il s'oppose à l'intuition la plus élémentaire que nous avons de l'espace et à la loi de conservation de la masse.

L'espace mathématique de la géométrie euclidienne s'étend infiniment loin, alors que les physiciens et cosmologistes n'affirment rien de définitif sur cette question pour l'espace physique.



Une représentation naïve du paradoxe de Banach-Tarski



Stefan Banach (1892-1945) était un mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle, dont il est l'un des fondateurs.



Alfred Tarski (1901-1983) était un logicien et philosophe polonais. Il a vécu et travaillé aux États-Unis depuis le début de la Seconde Guerre mondiale, en 1939.

limitée. Il s'ensuit que l'affirmation mathématique "un nombre réel est rationnel, ou irrationnel" n'a pas de sens pour un physicien.»

Ajoutons qu'un mathématicien accorde une grande importance à l'idée que l'infini des nombres réels est plus grand que l'infini dénombrable des nombres entiers et des nombres rationnels, alors que pour le physicien cela ne correspond à rien de concret.

UNE PHYSIQUE ÉLÉGANTE, MAIS INEXACTE !

Le physicien et mathématicien Roger Penrose, professeur émérite à l'université d'Oxford, exprime aussi ses doutes : « Les nombres réels se réfèrent à une idéalisation mathématique plutôt qu'à une quantité physique objective et réelle. Le système des nombres réels a la propriété, par exemple, qu'entre deux >

2

> quelconques d'entre eux, si proches soient-ils, il en existe un troisième. Si nous continuions à diviser l'intervalle physique entre deux points, nous atteindrions finalement des échelles si petites que le concept même de distance cesserait d'avoir du sens. On considère qu'à l'échelle de la gravitation quantique, environ $1/10^{20}$ de la taille d'une particule subatomique, ce serait le cas. [...] Les nombres réels sont choisis en physique pour leur utilité mathématique, leur simplicité et leur élégance, et aussi parce qu'ils s'accordent sur un grand intervalle avec les concepts physiques de distance et de temps, [...] mais ils ne sont pas en accord avec les concepts physiques sur toutes les échelles.»

LA CARTE N'EST PAS LE TERRITOIRE

Toutefois, pour le physicien et philosophe des sciences français Hervé Zwirn, la difficulté est levée quand on distingue ce que l'on représente et ce qui est représenté : le modèle mathématique n'est pas la réalité modélisée. Il ajoute : «Les nombres réels ne sont pas des objets

physiques qui existent dans l'espace, ils ne sont que des modes de représentation qui permettent de se référer à des objets physiques.» Pour lui, il n'y a donc pas de problème grave lié à l'utilisation des nombres réels en physique.

Cependant, en utilisant les nombres réels en physique, on opère une surreprésentation de la réalité : les concepts mathématiques utilisés sont bien plus riches en informations que ne l'est la réalité visée. D'habitude, c'est le contraire ! On modélisera par exemple un réseau routier par un graphe mathématique qui contient moins d'informations que le réseau véritable. De même, les neurones formels sont des simplifications discrètes et finies de la complexité biologique des neurones biologiques.

Récemment, Nicolas Gisin, physicien à l'université de Genève, a dénoncé l'une des conséquences de l'utilisation des nombres réels en physique.

On oppose souvent la mécanique classique et la mécanique quantique en affirmant que la première est déterministe alors que la seconde

LA QUESTION DU DÉTERMINISME

La mécanique classique est généralement considérée comme déterministe. L'idée de ce déterminisme a été magistralement exprimée par Pierre-Simon de Laplace dans son essai sur les probabilités de 1814 : « Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, seraient présents à ses yeux. »

Selon Nicolas Gisin, ce déterminisme provient d'une utilisation trompeuse des nombres réels. Ce physicien de l'université de Genève propose de considérer que les nombres réels décrivant l'état initial d'un système physique ne sont fixés que partiellement (c'est-à-dire avec quelques chiffres significatifs) et que ce n'est que plus tard, au cours de l'évolution du système, que les chiffres donnant plus de précisions se déterminent progressivement, et cela d'une manière aléatoire. Cette version non déterministe de la mécanique classique est empiriquement équivalente à sa version usuelle. Symétriquement, Nicolas Gisin insiste sur l'existence de versions déterministes non réfutées de la mécanique quantique, théorie que l'on considère en général comme intrinsèquement indéterministe. Finalement, pour lui et d'autres philosophes des sciences, la question du déterminisme n'est pas une question scientifique.



Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749-1827), portrait de Jean-Baptiste Paulin Guérin.