

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

COMBINES POUR TÉTRADES

La combinatoire géométrique exige une patience et une minutie dont souvent seul l'ordinateur est capable. Le cas des tétrades est exemplaire.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Thomas Cabaret, un lecteur de la rubrique, m'a signalé un article de Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis, du département de mathématiques de l'université de Lettonie, à Riga. Bien que publié dans une revue assez confidentielle, l'article est très amusant et associe raisonnements géométriques astucieux pour certaines questions et calculs informatiques pour d'autres. Quelques résultats de ce bel article seront présentés ici, accompagnés d'autres sur le thème des groupes de formes géométriques ayant de multiples contacts.

Le mot «tétrade» existe en français et signifie une suite de quatre notes musicales, un groupe de quatre bits d'information, un alignement de quatre objets astronomiques, etc. Si nous voulons suivre les progrès récents en géométrie combinatoire, il faut ajouter à cette liste la définition suivante : une tétrade est une association de quatre formes planaires identiques et d'un seul tenant, chacune en contact avec toutes les autres par au moins un segment de droite ou de courbe. Le mot anglais *tetrad* a été introduit en anglais avec ce sens en 1975 par Michael Buckley.

Deux exemples de tétrade sont donnés dans l'encadré 1. Notons bien que chaque exemplaire de la forme touche les trois autres.

Que quatre formes planaires d'un seul tenant, identiques ou non, puissent se toucher deux à deux sur le plan est un maximum. Il est en effet impossible de trouver cinq formes du plan d'un seul tenant se touchant deux à deux. C'est une conséquence du théorème de théorie des graphes qui stipule que le graphe complet non orienté K_5 (cinq nœuds, chacun relié aux quatre autres) n'est pas planaire, c'est-à-dire ne peut pas être dessiné sur le plan sans que deux arcs se croisent (voir l'encadré 1). En effet, si cinq formes d'un seul tenant du plan se touchaient deux à deux, en les contractant chacune en un point et en représentant chaque contact entre deux formes par un arc joignant les points correspondants, on obtiendrait une représentation planaire de K_5 sans croisement des arcs... ce qui est impossible.

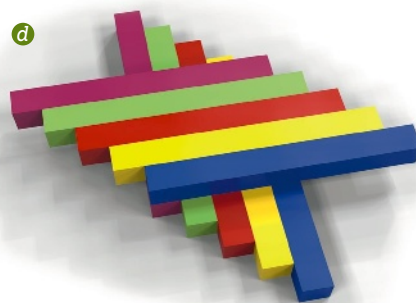
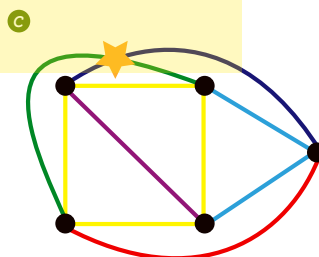
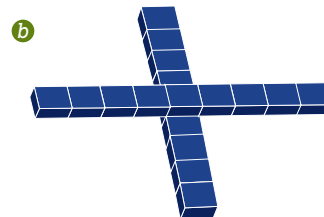
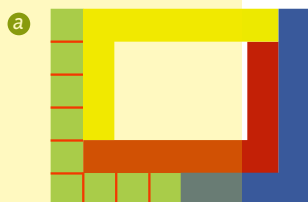
À TROIS DIMENSIONS

À trois dimensions, la situation est très différente, puisque pour tout entier n , il existe dans l'espace une forme F d'un seul tenant, et une disposition de n exemplaires de F telle >

TÉTRADES DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

Un exemple de tétrade (a) : les quatre formes composant la figure sont identiques (on passe de l'une à l'autre par translation, rotation ou symétrie axiale) et chaque forme touche toutes les autres. Il est impossible de faire la même chose dans le plan avec 5 formes, car on en déduirait une représentation planaire sans croisement du graphe K_5 (chacun des cinq nœuds est lié à tous les autres), ce qui est impossible (b).

Dans l'espace, il existe des configurations de n formes identiques se touchant toutes. L'image d, due à Francisco De Comité, montre la solution pour $n = 5$: la configuration est constituée de 5 formes, chacune étant la réunion de deux barres de la même couleur (c). Cela se généralise à n formes.



LES PLUS PETITES TÉTRADES EN POLYOMINOS

Toutes les tétrades faites avec des polyominos les plus petits possible (8 carrés par polyomino) sont montrées ici. On peut noter que certains polyominos donnent plusieurs tétrades distinctes.

