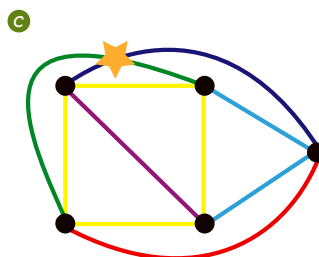
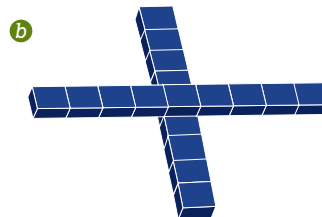
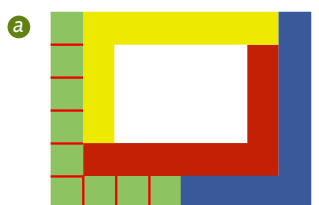


1

TÉTRADES DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

Un exemple de tétrade (a) : les quatre formes composant la figure sont identiques (on passe de l'une à l'autre par translation, rotation ou symétrie axiale) et chaque forme touche toutes les autres. Il est impossible de faire la même chose dans le plan avec 5 formes, car on en déduirait une représentation planaire sans croisement du graphe K_5 (chacun des cinq nœuds est lié à tous les autres), ce qui est impossible (b).

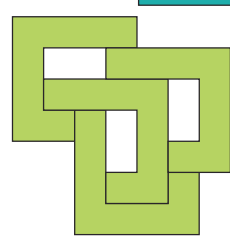
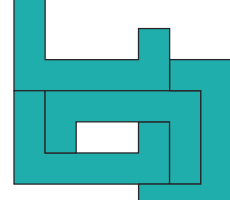
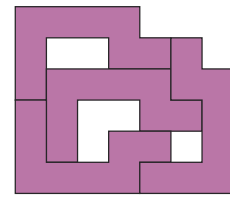
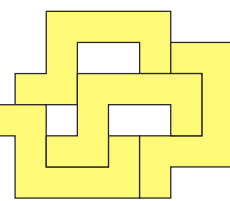
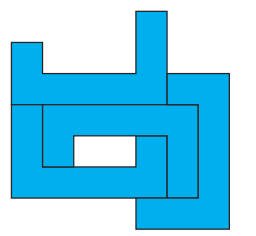
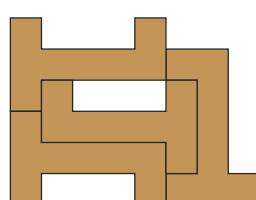
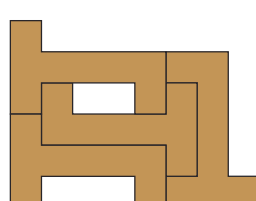
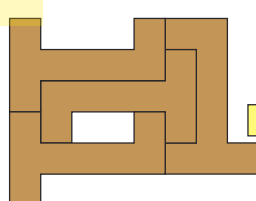
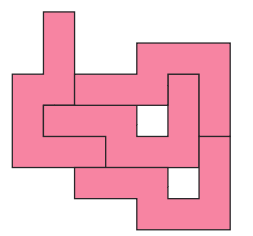
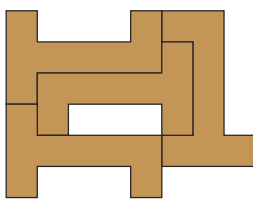
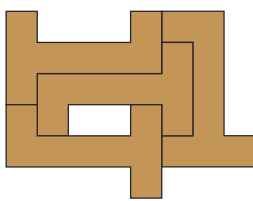
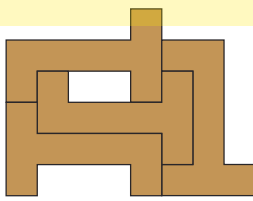
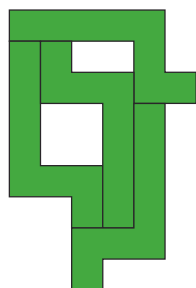
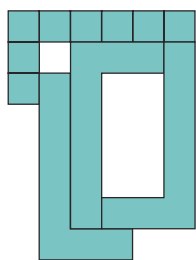
Dans l'espace, il existe des configurations de n formes identiques se touchant toutes. L'image d, due à Francisco De Comité, montre la solution pour $n = 5$: la configuration est constituée de 5 formes, chacune étant la réunion de deux barres de la même couleur (c). Cela se généralise à n formes.



2

LES PLUS PETITES TÉTRADES EN POLYOMINOS

Toutes les tétrades faites avec des polyominos les plus petits possible (8 carrés par polyomino) sont montrées ici. On peut noter que certains polyominos donnent plusieurs tétrades distinctes.

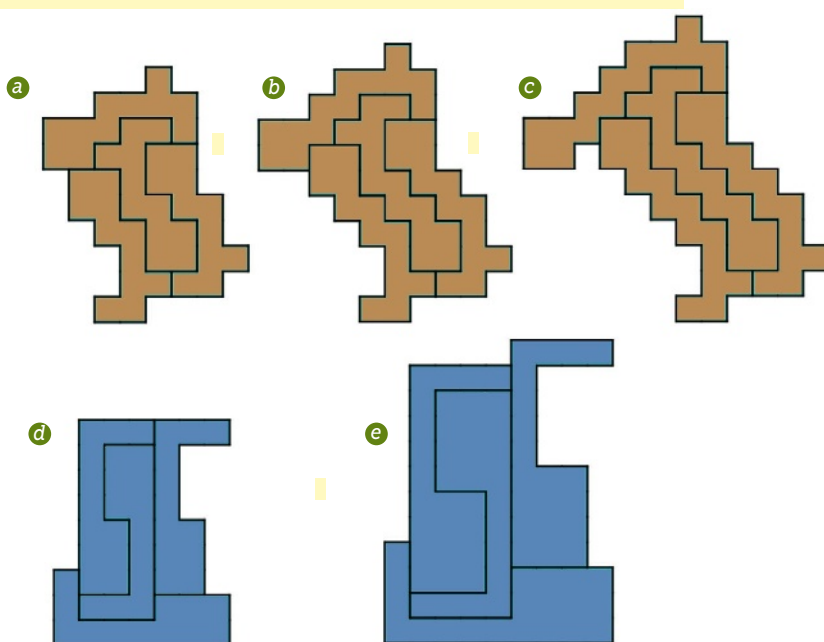


3

TÉTRADES EN POLYOMINOS SANS TROU

Le plus petit polyomino donnant un tétrade sans trou est celui utilisé pour le dessin a. La série de dessins a, b, c se prolonge de manière évidente et montre donc qu'il existe une infinité de tétrades sans trou faites de polyominos.

La série d, e se prolonge aussi de manière évidente et montre qu'il existe une infinité de tétrades sans trou faites de polyominos dont aucun n'est retourné pour assembler la tétrade.



n	Nombre de polyominos à n carrés	Nombre de polyominos à n carrés donnant une tétrade	Nombre de tétrades trouvées pour n	Nombre de tétrades sans trou trouvées pour n
8	369	8	14	0
9	1285	42	83	0
10	4 655	187	341	0
11	17 073	739	1 388	1
12	63 600	2 871	5 648	10
13	238 591	11 300	22 688	1
14	901 971	44 440	90 243	11
15	3 426 576	172 984	352 243	36
16	13 079 255	670 107	1 373 595	66
17	50 107 909	2 599 478	5 384 209	70

> que chaque exemplaire de F touche les $n-1$ autres. Un exemple de telle forme F est constitué de deux barres en croix (voir l'encadré 1, c) : on prend deux barres de $2n-1$ cubes collés en ligne; on colle perpendiculairement les deux barres par leur cube central. On dispose alors sans mal n copies de F en s'arrangeant pour que chacune touche par un morceau de surface toutes les autres (voir l'encadré 1, d).

On remarquera que cet assemblage dans l'espace montre que si l'on voulait colorier des cellules d'un seul tenant d'une partie de l'espace sans que deux cellules en contact portent la même couleur, le nombre de couleurs nécessaires serait infini. Le théorème des quatre couleurs du plan (on peut colorier toute carte plane avec quatre couleurs sans que deux pays voisins portent la même couleur) n'est donc généralisable dans l'espace ni avec 5 couleurs, ni avec n couleurs quel que soit l'entier n .

TÉTRADES DE POLYOMINOS

Concentrons-nous maintenant sur le plan et plus particulièrement sur les polyominos, qui sont les formes d'un seul tenant obtenues en accolant côté contre côté des carrés de même taille.

La figure a de l'encadré 1 montre une tétrade dont la forme de base est un polyomino de 9 carrés. Peut-on faire mieux, c'est-à-dire trouver une tétrade faite à partir de quatre polyominos utilisant chacun moins de 9 carrés? La réponse est positive et une recherche par ordinateur donne la liste exhaustive de toutes les tétrades utilisant quatre polyominos identiques comportant 8 carrés chacun (voir l'encadré 2).

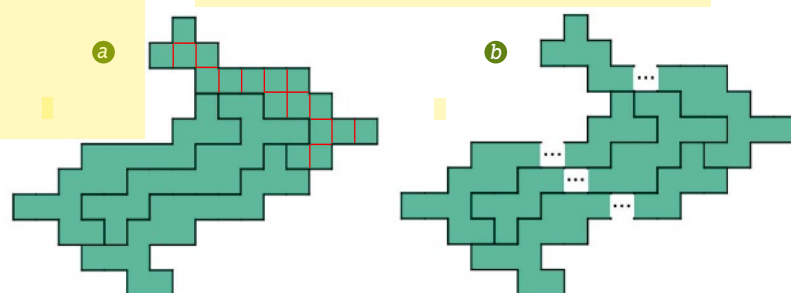
L'ordinateur indique aussi qu'il n'existe pas de polyominos plus petits permettant de composer une tétrade.

Le travail de l'ordinateur pour arriver à ces dessins et résultats est presque instantané, car il n'y a que 369 polyominos faits de 8 carrés et beaucoup moins pour les polyominos plus petits. Un humain voulant obtenir la liste complète de l'encadré 2 devrait sans doute travailler des jours entiers, et la démonstration complète qu'il n'y a pas d'autre solution que celles indiquées serait très longue. On ne peut cependant pas considérer que la réponse donnée par l'ordinateur sans justification constitue une démonstration, mais si plusieurs programmes indépendants arrivent au même résultat, personne ne doutera que nous disposons de la liste complète de tétrades faites de polyominos de 8 carrés; l'utilisation d'ordinateurs en mathématiques conduit à un consensus sur les résultats, mais ils sont parfois d'une nature différente de celui que donnent les démonstrations.

4

POLYOMINOS DE n CARRÉS FORMANT UNE TÉTRADE SANS TROU

Ces dessins (de Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis) montrent que pour tout entier $n \geq 17$, il existe des tétrades sans trou formées de polyominos de n carrés exactement. Les pointillés dans b représentent un nombre quelconque de carrés unités.



5

TOUTES LES FORMES DE TROUS SONT POSSIBLES

Il est évident qu'un trou dans une tétrade faite de polyominos sans trou a nécessairement la forme d'un polyomino sans trou. La réciproque (« Tout polyomino sans trou peut être un trou dans une forme constituant une tétrade ») est vraie, comme Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis l'ont démontré par un élégant raisonnement (voir la bibliographie) dont voici les détails.

Considérons un polyomino sans trou quelconque, par exemple celui dessiné en a.

Repérons son carré le plus à gauche et le plus bas. Il est dessiné en noir.

Prenons maintenant un polyomino ayant la forme dessinée en b, et assez grand pour que, en plaçant le polyomino a avec le carré noir comme indiqué, tout le polyomino a soit dans le polyomino b.

Creusons le polyomino b en lui enlevant le polyomino a placé comme on vient de l'indiquer.

Le polyomino obtenu permet de construire une tétrade (c) avec un trou qui a exactement la forme du polyomino a.

