

> que chaque exemplaire de F touche les $n-1$ autres. Un exemple de telle forme F est constitué de deux barres en croix (voir l'encadré 1, c) : on prend deux barres de $2n-1$ cubes collés en ligne; on colle perpendiculairement les deux barres par leur cube central. On dispose alors sans mal n copies de F en s'arrangeant pour que chacune touche par un morceau de surface toutes les autres (voir l'encadré 1, d).

On remarquera que cet assemblage dans l'espace montre que si l'on voulait colorier des cellules d'un seul tenant d'une partie de l'espace sans que deux cellules en contact portent la même couleur, le nombre de couleurs nécessaires serait infini. Le théorème des quatre couleurs du plan (on peut colorier toute carte plane avec quatre couleurs sans que deux pays voisins portent la même couleur) n'est donc généralisable dans l'espace ni avec 5 couleurs, ni avec n couleurs quel que soit l'entier n .

TÉTRADES DE POLYOMINOS

Concentrons-nous maintenant sur le plan et plus particulièrement sur les polyominos, qui sont les formes d'un seul tenant obtenues en accolant côté contre côté des carrés de même taille.

La figure *a* de l'encadré 1 montre une tétrade dont la forme de base est un polyomino de 9 carrés. Peut-on faire mieux, c'est-à-dire trouver une tétrade faite à partir de quatre polyominos utilisant chacun moins de 9 carrés? La réponse est positive et une recherche par ordinateur donne la liste exhaustive de toutes les tétrades utilisant quatre polyominos identiques comportant 8 carrés chacun (voir l'encadré 2).

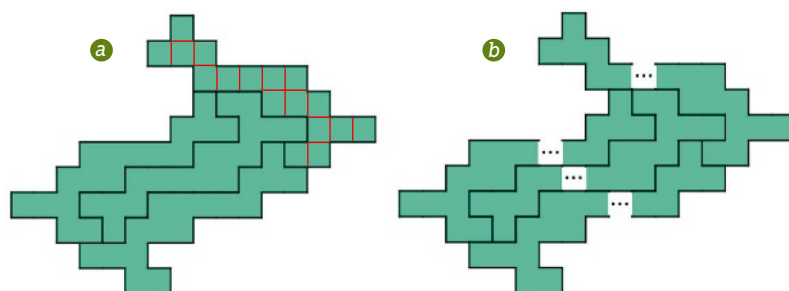
L'ordinateur indique aussi qu'il n'existe pas de polyominos plus petits permettant de composer une tétrade.

Le travail de l'ordinateur pour arriver à ces dessins et résultats est presque instantané, car il n'y a que 369 polyominos faits de 8 carrés et beaucoup moins pour les polyominos plus petits. Un humain voulant obtenir la liste complète de l'encadré 2 devrait sans doute travailler des jours entiers, et la démonstration complète qu'il n'y a pas d'autre solution que celles indiquées serait très longue. On ne peut cependant pas considérer que la réponse donnée par l'ordinateur sans justification constitue une démonstration, mais si plusieurs programmes indépendants arrivent au même résultat, personne ne doutera que nous disposons de la liste complète de tétrades faites de polyominos de 8 carrés; l'utilisation d'ordinateurs en mathématiques conduit à un consensus sur les résultats, mais ils sont parfois d'une nature différente de celui que donnent les démonstrations.

4

POLYOMINOS DE n CARRÉS FORMANT UNE TÉTRADE SANS TROU

Ces dessins (de Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis) montrent que pour tout entier $n \geq 17$, il existe des tétrades sans trou formées de polyominos de n carrés exactement. Les pointillés dans *b* représentent un nombre quelconque de carrés unités.



5

TOUTES LES FORMES DE TROUS SONT POSSIBLES

Il est évident qu'un trou dans une tétrade faite de polyominos sans trou a nécessairement la forme d'un polyomino sans trou. La réciproque (« Tout polyomino sans trou peut être un trou dans une forme constituant une tétrade ») est vraie, comme Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis l'ont démontré par un élégant raisonnement (voir la bibliographie) dont voici les détails.

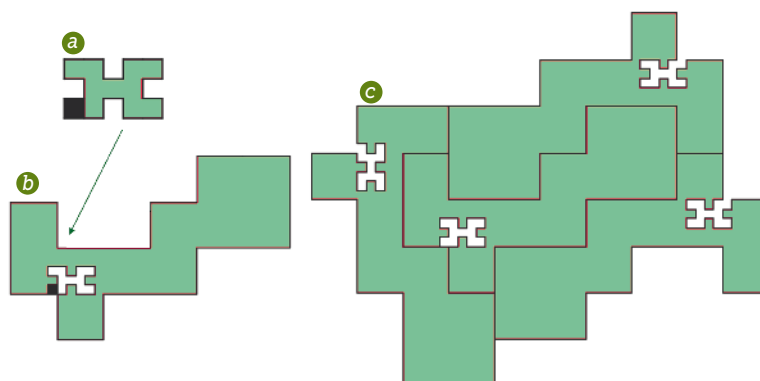
Considérons un polyomino sans trou quelconque, par exemple celui dessiné en *a*.

Repérons son carré le plus à gauche et le plus bas. Il est dessiné en noir.

Prenons maintenant un polyomino ayant la forme dessinée en *b*, et assez grand pour que, en plaçant le polyomino *a* avec le carré noir comme indiqué, tout le polyomino *a* soit dans le polyomino *b*.

Creusons le polyomino *b* en lui enlevant le polyomino *a* placé comme on vient de l'indiquer.

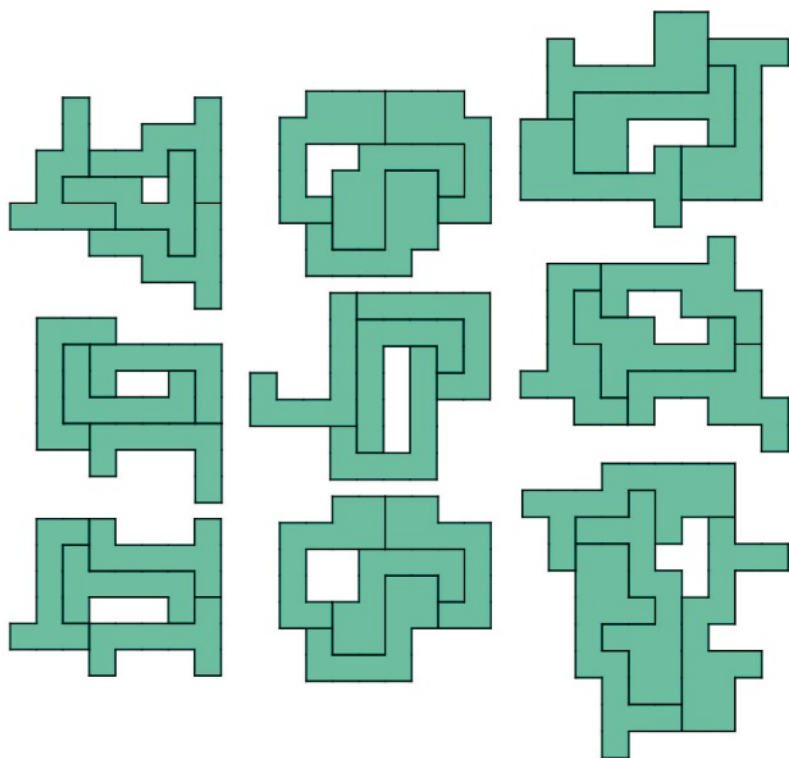
Le polyomino obtenu permet de construire une tétrade (*c*) avec un trou qui a exactement la forme du polyomino *a*.



6

DES TROUS, DES PETITS TROUS...

Pour tous les trous possibles de 1 carré, 2 carrés, 3 carrés (2 cas), et 4 carrés (5 cas), voici la tétrade utilisant les polyominos les plus petits possible et dotés d'un tel trou. C'est un programme de Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis qui a donné ces résultats.



> Précisons que l'on considère que deux polyominos sont identiques si l'un s'obtient à partir de l'autre par translation, rotation ou symétrie par rapport à une droite (retournement du polyomino). Le décompte des polyominos est un problème difficile et on ne connaît, grâce à des calculs par ordinateur, le nombre de polyominos de n carrés que pour n compris entre 1 et 28. Ces nombres sont donnés par la suite <https://oeis.org/A000105> de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane. Le record de calcul, pour 28, a été établi par le chercheur portugais Tomás Oliveira e Silva: il y a 153511100594603 polyominos composés de 28 carrés. Pour créer et étudier les tétrades faites de polyominos à n carrés, Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis ont mis au point un algorithme qui fonctionne de la façon suivante.

– La liste complète des polyominos P à n carrés est engendrée et on envisage chacun séparément.

– Une première copie du polyomino P étudié est déposée sur le plan à un endroit quelconque. Une seconde copie P' de P est ajoutée et placée de toutes les façons possibles où P' touche P au moins par un segment correspondant au côté d'un carré. De même, une troisième copie P'' , puis une quatrième copie P''' sont placées de toutes les façons possibles touchant P .

– On examine si les quatre copies constituent une tétrade: pas de chevauchement des copies de P , et chacune touche les trois autres par au moins un segment.

– Si la configuration P - P' - P'' - P''' est une tétrade, on contrôle qu'elle n'est pas déjà présente dans la liste que le programme construit, ni une configuration s'en déduisant par translation, rotation ou symétrie axiale (retournement de la configuration). Si la configuration est vraiment nouvelle, le programme l'ajoute à la liste qu'il constitue.

Le tableau résultant du calcul est reproduit page 82. Comme on l'a vu pour le cas $n=8$, on observe que le nombre de tétrades obtenues est toujours plus grand que le nombre de polyominos donnant des tétrades. La raison est simple: certains polyominos se disposent de plusieurs façons en tétrades.

Le rapport entre le nombre de tétrades et le nombre de polyominos donnant au moins une tétrade augmente avec n . On pense que ce rapport tend vers l'infini, mais c'est une conjecture. Le calcul pour arriver à traiter complètement le cas $n=17$ a demandé 30 heures à la machine utilisée (un processeur Intel® Core™ i7-3820 à 3,60 GHz).

TÉTRADES SANS TROU

La dernière colonne du tableau indique le nombre de tétrades sans trou et montre que la plus petite est composée de polyominos de 11 carrés. Elle est représentée sur la figure *a* de l'encadré 3.

La première série (*a*, *b*, *c*) de dessins de l'encadré 3 se poursuit à l'infini et montre donc qu'il existe une infinité de tétrades sans trou à base de polyominos.

La seconde série (*d*, *e*) montre de même qu'il existe une infinité de tétrades sans trou à base de polyominos ne nécessitant pas de retourner un polyomino pour composer les tétrades.

L'encadré 4 montre que pour tout entier n à partir de 17, il existe une tétrade sans trou à base de polyominos faits de n carrés. Pour les entiers compris entre 11 et 17, on prouve aussi, en traitant chaque cas, que de telles tétrades existent.

On remarquera que les trois derniers énoncés sont des affirmations que l'on a découvertes grâce à l'ordinateur, mais qu'une fois connues, on est en mesure, et c'est