

L'ESSENTIEL

> Le « problème des trois corps » consiste à décrire la trajectoire de trois masses soumises seulement à leur attraction gravitationnelle mutuelle, leurs positions et vitesses initiales étant données.

> Au cours des deux derniers siècles, les mathématiciens ont montré que le problème des trois corps est quasiment

« insoluble » : il est généralement impossible de décrire la trajectoire des corps par une formule.

> Le problème continue cependant d'inspirer les chercheurs, qui découvrent par exemple des solutions intéressantes dans des configurations particulières.

L'AUTEUR



RICHARD MONTGOMERY
professeur
de mathématiques
à l'université de Californie
à Santa Cruz, aux États-Unis

Le problème des trois corps rebondit

Déterminer les trajectoires de trois corps soumis uniquement à leur interaction gravitationnelle est un problème célèbre posé depuis plus de deux siècles. Les mathématiciens savent aujourd'hui qu'ils ne pourront jamais le « résoudre » complètement. Cependant, l'étude de cas particuliers a, encore récemment, donné lieu à des découvertes intrigantes.

Au printemps 2014, j'avais baissé les bras face au problème des trois corps. À court d'idées, j'avais commencé à programmer sur mon ordinateur portable pour calculer des solutions approchées et les étudier. Ces tentatives ne répondraient jamais à la question mathématique précise que je m'étais posée, mais elles me fourniraient des indices pour avancer. Cependant, mon incompetence en programmation rendait cette expérience pénible pour un mathématicien comme moi, attaché à son papier et son crayon. J'ai alors fait appel à mon vieil ami Carles Simó, professeur à l'université de Barcelone, pour m'aider dans ma quête maladroite. Je ne me doutais pas qu'il m'ouvrirait un horizon totalement nouveau en mathématiques fondamentales.

Cet automne-là, je me suis donc rendu en Espagne pour rencontrer mon collègue,

reconnu comme l'un des spécialistes les plus imaginatifs et rigoureux de l'analyse numérique en mécanique céleste. C'est aussi un homme direct qui ne tergiverse pas. Pendant mon premier après-midi dans son bureau, il m'a regardé de ses yeux perçants et m'a demandé : « Pourquoi cette question si abstraite t'intéresse-t-elle, au fond ? » Mon sang n'a fait qu'un tour. Cela faisait près de vingt ans que toute mon activité de recherche y était consacrée ! Si ma question me semblait importante, c'est parce qu'elle est liée à la fois à un problème vieux de plusieurs siècles et à deux domaines majeurs des mathématiques modernes : la topologie et la géométrie riemannienne.

Les origines du problème des trois corps remontent à 1687, lorsqu'Isaac Newton a, le premier, posé et résolu le problème des deux corps dans ses *Principia Mathematica*. Il s'était demandé : « Comment deux masses se déplacent-elles dans l'espace si elles ne sont »

> soumises qu'à leur attraction gravitationnelle mutuelle?» Newton a reformulé cette question en un problème de résolution d'un système d'équations différentielles, des équations qui déterminent le mouvement futur d'un objet à partir de sa position et de sa vitesse actuelles. Il a complètement résolu ces équations pour deux corps. Dans les solutions, ou «orbites» (des trajectoires vérifiant ces équations différentielles), chaque objet décrit une conique – c'est-à-dire un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

En identifiant toutes les orbites possibles, Newton a retrouvé et même affiné les «lois de Kepler», des lois empiriques régissant les mouvements des astres, publiées par l'astronome allemand Johannes Kepler en 1609, et qui synthétisaient des décennies d'observations astronomiques de son employeur, Tycho Brahe.

La première loi de Kepler, ou «loi des orbites», stipule que, dans le Système solaire, chaque planète – ou comète – se déplace selon une conique, dont l'un des foyers est le Soleil. Dans les solutions de Newton, cependant, les deux corps – le Soleil et une planète – se déplacent selon deux coniques distinctes. Ces deux coniques ont un foyer en commun: le centre de masse des deux objets. Le Soleil étant bien plus massif que les planètes du Système solaire, le centre de masse d'un système Soleil-planète est contenu dans l'étoile, très près de son centre de masse à elle, et cette dernière oscille à peine autour du centre de masse commun, suivant une petite ellipse.

Si l'on considère trois masses interagissant par la force de gravitation newtonienne au lieu de deux, le problème devient celui des trois corps. Là encore, les orbites sont les solutions d'un système d'équations différentielles. En revanche, il est difficile, voire impossible, d'exhiber des formules explicites pour ces orbites. À ce jour, malgré l'aide des ordinateurs modernes et plusieurs siècles de travail acharné de physiciens et mathématiciens parmi les plus talentueux, on n'a de formules explicites que pour cinq familles d'orbites: trois découvertes par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1767, et deux par son confrère français (d'origine italienne) Joseph-Louis Lagrange en 1772.

Et pour cause: en 1890, le mathématicien et physicien français Henri Poincaré a mis en évidence des phénomènes chaotiques dans le problème des trois corps. Les solutions des équations du mouvement sont si sensibles aux

DEUX EXEMPLES D'ORBITES À 2 CORPS

Soleil beaucoup plus massif qu'une planète: l'orbite elliptique du Soleil est très petite.



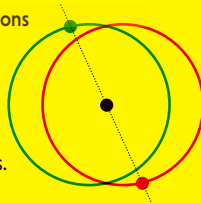
Deux masses égales en orbite elliptique



DEUX EXEMPLES D'ORBITES À 3 CORPS

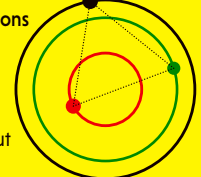
L'une des solutions d'Euler

Trois masses égales dont l'une au centre: les corps sont toujours alignés.

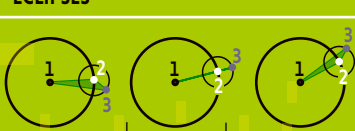


L'une des solutions de Lagrange

Les corps forment un triangle équilatéral à tout instant.

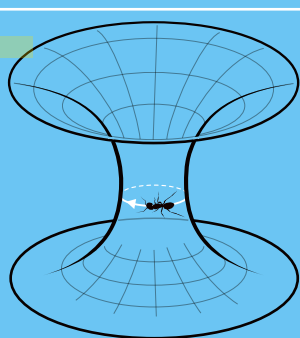


ÉCLIPSES



Noté «éclipse de type 2» (corps 2 au centre)

CATÉNOÏDE



conditions initiales qu'on ne les connaît jamais toutes exactement, ou même seulement avec un degré de précision donné; on est donc très loin de la solution simple, unique et exacte de Newton pour le problème des deux corps.

Cependant, par «intégration numérique», un ensemble de techniques d'analyse numérique implémentées avec efficacité sur un ordinateur, on peut tout de même calculer de façon approchée des portions de trajectoire de durée finie, ce qui est d'ailleurs essentiel dans la planification des missions spatiales. En allongeant le temps de calcul alloué à l'ordinateur, il est possible de rendre ces approximations aussi fidèles que voulu, sous réserve de connaître parfaitement les conditions initiales.

UNE QUESTION SUR LES SUITES D'ÉCLIPSES

C'était donc pour obtenir de l'aide dans ce domaine prometteur que je consultais mon collègue Carles Simó. Sa question m'avait interloqué. Je travaillais en effet depuis plusieurs décennies sur un point bien précis en lien avec le problème des trois corps:

«Toute suite d'éclipses périodique est-elle la suite associée à une certaine solution périodique du problème des trois corps planaire?»

Je m'explique. Imaginez trois corps – des étoiles ou des planètes, par exemple – se déplaçant dans un même plan et exerçant les uns sur les autres une attraction gravitationnelle. Par la suite, on se placera toujours dans ce cas particulier, dit «planaire». Numérotez les objets 1, 2 et 3. Leurs masses sont pour l'instant quelconques. Comme les trois objets se déplacent dans un même plan, ils seront de temps en temps alignés. Ces instants ne sont rien d'autre que des éclipses (techniquement, ils sont nommés «syzygies», un mot idéal pour gagner au jeu du pendu). À mesure que le temps s'écoule, enregistrez chaque éclipse qui se produit, en lui donnant le numéro 1, 2 ou 3 selon le numéro de l'astre qui se trouve entre les deux autres. De cette façon, on obtient une suite de 1, 2 et 3, la «suite d'éclipses».

Par exemple, dans une version simplifiée de notre système Soleil-Terre-Lune, la Lune, numérotée 3, tourne autour de la Terre (corps numéroté 2) en un mois (considéré ici comme valant un douzième d'année) tandis que la Terre met un an à faire une révolution autour du Soleil, numéroté 1. Ce mouvement se répète, et