

> soumises qu'à leur attraction gravitationnelle mutuelle?» Newton a reformulé cette question en un problème de résolution d'un système d'équations différentielles, des équations qui déterminent le mouvement futur d'un objet à partir de sa position et de sa vitesse actuelles. Il a complètement résolu ces équations pour deux corps. Dans les solutions, ou «orbites» (des trajectoires vérifiant ces équations différentielles), chaque objet décrit une conique – c'est-à-dire un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

En identifiant toutes les orbites possibles, Newton a retrouvé et même affiné les «lois de Kepler», des lois empiriques régissant les mouvements des astres, publiées par l'astronome allemand Johannes Kepler en 1609, et qui synthétisaient des décennies d'observations astronomiques de son employeur, Tycho Brahe.

La première loi de Kepler, ou «loi des orbites», stipule que, dans le Système solaire, chaque planète – ou comète – se déplace selon une conique, dont l'un des foyers est le Soleil. Dans les solutions de Newton, cependant, les deux corps – le Soleil et une planète – se déplacent selon deux coniques distinctes. Ces deux coniques ont un foyer en commun: le centre de masse des deux objets. Le Soleil étant bien plus massif que les planètes du Système solaire, le centre de masse d'un système Soleil-planète est contenu dans l'étoile, très près de son centre de masse à elle, et cette dernière oscille à peine autour du centre de masse commun, suivant une petite ellipse.

Si l'on considère trois masses interagissant par la force de gravitation newtonienne au lieu de deux, le problème devient celui des trois corps. Là encore, les orbites sont les solutions d'un système d'équations différentielles. En revanche, il est difficile, voire impossible, d'exhiber des formules explicites pour ces orbites. À ce jour, malgré l'aide des ordinateurs modernes et plusieurs siècles de travail acharné de physiciens et mathématiciens parmi les plus talentueux, on n'a de formules explicites que pour cinq familles d'orbites: trois découvertes par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1767, et deux par son confrère français (d'origine italienne) Joseph-Louis Lagrange en 1772.

Et pour cause: en 1890, le mathématicien et physicien français Henri Poincaré a mis en évidence des phénomènes chaotiques dans le problème des trois corps. Les solutions des équations du mouvement sont si sensibles aux

DEUX EXEMPLES D'ORBITES À 2 CORPS

Soleil beaucoup plus massif qu'une planète: l'orbite elliptique du Soleil est très petite.



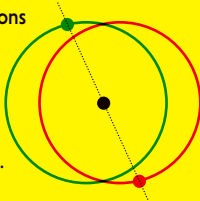
Deux masses égales en orbite elliptique



DEUX EXEMPLES D'ORBITES À 3 CORPS

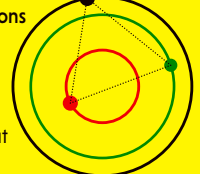
L'une des solutions d'Euler

Trois masses égales dont l'une au centre: les corps sont toujours alignés.



L'une des solutions de Lagrange

Les corps forment un triangle équilatéral à tout instant.

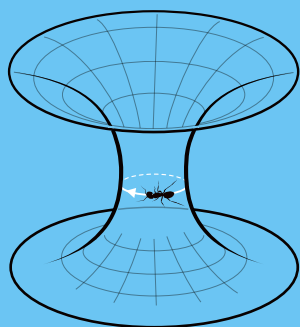


ÉCLIPSES



Noté «éclipse de type 2» (corps 2 au centre)

CATÉNOÏDE



conditions initiales qu'on ne les connaît jamais toutes exactement, ou même seulement avec un degré de précision donné; on est donc très loin de la solution simple, unique et exacte de Newton pour le problème des deux corps.

Cependant, par «intégration numérique», un ensemble de techniques d'analyse numérique implémentées avec efficacité sur un ordinateur, on peut tout de même calculer de façon approchée des portions de trajectoire de durée finie, ce qui est d'ailleurs essentiel dans la planification des missions spatiales. En allongeant le temps de calcul alloué à l'ordinateur, il est possible de rendre ces approximations aussi fidèles que voulu, sous réserve de connaître parfaitement les conditions initiales.

UNE QUESTION SUR LES SUITES D'ÉCLIPSES

C'était donc pour obtenir de l'aide dans ce domaine prometteur que je consultais mon collègue Carles Simó. Sa question m'avait interloqué. Je travaillais en effet depuis plusieurs décennies sur un point bien précis en lien avec le problème des trois corps:

«Toute suite d'éclipses périodique est-elle la suite associée à une certaine solution périodique du problème des trois corps planaire?»

Je m'explique. Imaginez trois corps – des étoiles ou des planètes, par exemple – se déplaçant dans un même plan et exerçant les uns sur les autres une attraction gravitationnelle. Par la suite, on se placera toujours dans ce cas particulier, dit «planaire». Numérotez les objets 1, 2 et 3. Leurs masses sont pour l'instant quelconques. Comme les trois objets se déplacent dans un même plan, ils seront de temps en temps alignés. Ces instants ne sont rien d'autre que des éclipses (techniquement, ils sont nommés «syzygies», un mot idéal pour gagner au jeu du pendu). À mesure que le temps s'écoule, enregistrez chaque éclipse qui se produit, en lui donnant le numéro 1, 2 ou 3 selon le numéro de l'astre qui se trouve entre les deux autres. De cette façon, on obtient une suite de 1, 2 et 3, la «suite d'éclipses».

Par exemple, dans une version simplifiée de notre système Soleil-Terre-Lune, la Lune, numérotée 3, tourne autour de la Terre (corps numéroté 2) en un mois (considéré ici comme valant un douzième d'année) tandis que la Terre met un an à faire une révolution autour du Soleil, numéroté 1. Ce mouvement se répète, et

donne donc lieu à une suite d'éclipses périodique : 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3. Cette suite ne contient pas de 1, puisque le Soleil ne se trouve jamais entre la Terre et la Lune. Pour une durée de un an, la suite contient donc 24 nombres, avec un groupe «2, 3» pour chacun des 12 mois de l'année.

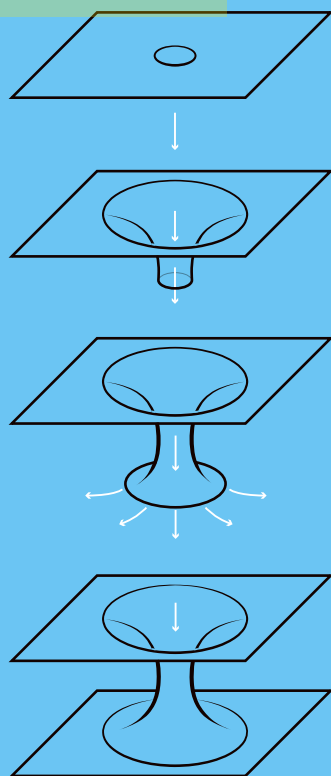
Dans le cas général, puisqu'il s'agit de systèmes chaotiques, il n'y a aucune raison pour que la suite d'éclipses d'une solution du problème des trois corps soit périodique: elle peut très bien se dérouler éternellement sans exhiber de motif discernable. Cependant, si la solution se répète à l'identique après un certain intervalle de temps, comme dans le système Soleil-Terre-Lune simplifié, alors la suite d'éclipses sera aussi périodique. D'où la question que je m'étais posée: toute suite d'éclipses périodique est-elle la suite associée à une certaine solution périodique du problème des trois corps planaire? Je soupçonnais que la réponse est «oui», mais je n'arrivais pas à le prouver.

DES OBJETS AVEC DES TROUS

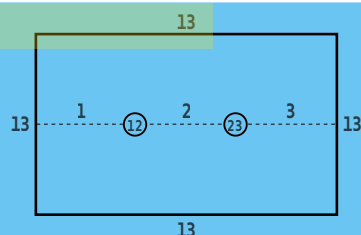
Carles Simó, pour sa part, était davantage versé dans l'aspect pratique du calcul numérique d'orbites pour les missions spatiales que dans des questions abstraites à propos de suites d'éclipses; il n'avait donc pas vu l'intérêt de ma question. Pourtant, j'avais l'intuition que, pour y répondre, je pourrais utiliser une approche qu'il connaissait bien, associant trois domaines des mathématiques: la topologie (domaine où l'on étudie les propriétés d'objets que l'on a le droit de déformer, mais pas de déchirer ou trouer), la géométrie riemannienne (qui étudie entre autres les surfaces courbes), et les systèmes dynamiques, relatifs à l'évolution temporelle des systèmes et aux mouvements des objets.

Pourquoi cette intuition? Parce que ces domaines étaient déjà reliés par d'autres résultats bien connus, dont certains présentent des similarités avec le problème des trois corps. Imaginez une fourmi qui marche sur la surface que les mathématiciens nomment «caténoïde». L'objectif de la fourmi est de trouver le chemin le plus court pour tourner une fois autour du trou. Du point de vue de la topologie, la caténoïde est identique à un plan (avec deux coordonnées réelles, x et y) «épointé», c'est-à-dire auquel on a retiré un seul point. En effet, retirez un point d'une feuille souple et déformable en caoutchouc. En poussant le bord du

DÉFORMATIONS EN TOPOLOGIE



ESPACE DE CONFIGURATION SANS COLLISION



trou vers le bas et en l'étirant vers l'extérieur, vous déformerez le plan en une caténoïde. Il a été démontré que, si le trou a été suffisamment élargi, non seulement il existe un chemin de longueur minimale, mais celui-ci satisfait une équation différentielle très similaire à celle du problème des trois corps. Ainsi, notre fourmi a trouvé une solution périodique à une équation différentielle intéressante.

Dans le problème des trois corps, le rôle de la caténoïde est assumé par ce qu'on nomme l'«espace de configuration», un espace dont chaque point encode simultanément la position des trois astres, de sorte qu'une courbe dans l'espace de configuration décrit le mouvement des trois corps. Veiller à ce que les corps n'entrent pas en collision revient ici à faire des trous – retirer des points – dans cet espace de configuration. Comme on le verra, d'un point de vue topologique, l'«espace de configuration sans collision» qui en résulte est identique au plan x - y auquel on a retiré deux points. On note «12» le trou représentant la collision des corps 1 et 2, et «23» celui représentant la collision des corps 2 et 3, et on place ces trous sur l'axe des abscisses (l'axe des x). On place aussi un troisième trou «à l'infini» (un point abstrait, situé infiniment loin de l'origine dans toutes les directions) pour représenter la collision des corps 1 et 3.

Ces trous divisent l'axe des abscisses en trois morceaux, notés 1, 2 et 3 (ces choix sont arbitraires et les rôles des corps 1, 2 et 3 peuvent bien sûr être intervertis). Une courbe dans ce plan x - y doublement épointé représente une trajectoire sans collision des trois corps, et donc une solution potentielle du problème des trois corps; potentielle seulement, car rien ne garantit pour l'instant que cette trajectoire satisfasse aux lois de la mécanique newtonienne. Quand la courbe coupe l'intervalle 1, cela signifie qu'une éclipse de type 1 se produit (le corps 1 est entre les deux autres), et de même pour les intervalles 2 et 3. De cette façon, une suite d'éclipses représente une manière d'enrouler la courbe autour des trous représentant les collisions.

Notre fourmi voulait minimiser la longueur de son chemin autour du trou sur la caténoïde. Pour compléter l'analogie entre le problème de la fourmi et le problème des trois corps, il faut remplacer la grandeur «longueur du chemin» par une quantité nommée «action» du chemin. On peut définir l'action comme ➤