

donne donc lieu à une suite d'éclipses périodique : 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3. Cette suite ne contient pas de 1, puisque le Soleil ne se trouve jamais entre la Terre et la Lune. Pour une durée de un an, la suite contient donc 24 nombres, avec un groupe «2, 3 » pour chacun des 12 mois de l'année.

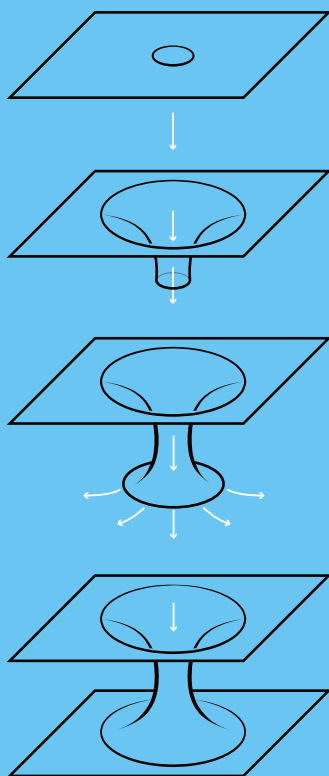
Dans le cas général, puisqu'il s'agit de systèmes chaotiques, il n'y a aucune raison pour que la suite d'éclipses d'une solution du problème des trois corps soit périodique: elle peut très bien se dérouler éternellement sans exhiber de motif discernable. Cependant, si la solution se répète à l'identique après un certain intervalle de temps, comme dans le système Soleil-Terre-Lune simplifié, alors la suite d'éclipses sera aussi périodique. D'où la question que je m'étais posée: toute suite d'éclipses périodique est-elle la suite associée à une certaine solution périodique du problème des trois corps planaire? Je soupçonnais que la réponse est «oui», mais je n'arrivais pas à le prouver.

DES OBJETS AVEC DES TROUS

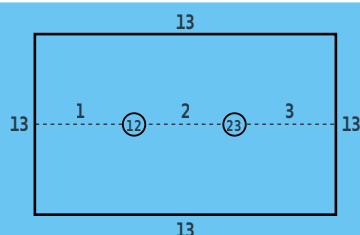
Carles Simó, pour sa part, était davantage versé dans l'aspect pratique du calcul numérique d'orbites pour les missions spatiales que dans des questions abstraites à propos de suites d'éclipses; il n'avait donc pas vu l'intérêt de ma question. Pourtant, j'avais l'intuition que, pour y répondre, je pourrais utiliser une approche qu'il connaissait bien, associant trois domaines des mathématiques: la topologie (domaine où l'on étudie les propriétés d'objets que l'on a le droit de déformer, mais pas de déchirer ou trouer), la géométrie riemannienne (qui étudie entre autres les surfaces courbes), et les systèmes dynamiques, relatifs à l'évolution temporelle des systèmes et aux mouvements des objets.

Pourquoi cette intuition? Parce que ces domaines étaient déjà reliés par d'autres résultats bien connus, dont certains présentent des similarités avec le problème des trois corps. Imaginez une fourmi qui marche sur la surface que les mathématiciens nomment «caténoïde». L'objectif de la fourmi est de trouver le chemin le plus court pour tourner une fois autour du trou. Du point de vue de la topologie, la caténoïde est identique à un plan (avec deux coordonnées réelles, x et y) «épointé», c'est-à-dire auquel on a retiré un seul point. En effet, retirez un point d'une feuille souple et déformable en caoutchouc. En poussant le bord du

DÉFORMATIONS EN TOPOLOGIE



ESPACE DE CONFIGURATION SANS COLLISION



trou vers le bas et en l'étirant vers l'extérieur, vous déformerez le plan en une caténoïde. Il a été démontré que, si le trou a été suffisamment élargi, non seulement il existe un chemin de longueur minimale, mais celui-ci satisfait une équation différentielle très similaire à celle du problème des trois corps. Ainsi, notre fourmi a trouvé une solution périodique à une équation différentielle intéressante.

Dans le problème des trois corps, le rôle de la caténoïde est assumé par ce qu'on nomme l'«espace de configuration», un espace dont chaque point encode simultanément la position des trois astres, de sorte qu'une courbe dans l'espace de configuration décrit le mouvement des trois corps. Veiller à ce que les corps n'entrent pas en collision revient ici à faire des trous – retirer des points – dans cet espace de configuration. Comme on le verra, d'un point de vue topologique, l'«espace de configuration sans collision» qui en résulte est identique au plan x - y auquel on a retiré deux points. On note «12» le trou représentant la collision des corps 1 et 2, et «23» celui représentant la collision des corps 2 et 3, et on place ces trous sur l'axe des abscisses (l'axe des x). On place aussi un troisième trou «à l'infini» (un point abstrait, situé infiniment loin de l'origine dans toutes les directions) pour représenter la collision des corps 1 et 3.

Ces trous divisent l'axe des abscisses en trois morceaux, notés 1, 2 et 3 (ces choix sont arbitraires et les rôles des corps 1, 2 et 3 peuvent bien sûr être intervertis). Une courbe dans ce plan x - y doublement épointé représente une trajectoire sans collision des trois corps, et donc une solution potentielle du problème des trois corps; potentielle seulement, car rien ne garantit pour l'instant que cette trajectoire satisfasse aux lois de la mécanique newtonienne. Quand la courbe coupe l'intervalle 1, cela signifie qu'une éclipse de type 1 se produit (le corps 1 est entre les deux autres), et de même pour les intervalles 2 et 3. De cette façon, une suite d'éclipses représente une manière d'enrouler la courbe autour des trous représentant les collisions.

Notre fourmi voulait minimiser la longueur de son chemin autour du trou sur la caténoïde. Pour compléter l'analogie entre le problème de la fourmi et le problème des trois corps, il faut remplacer la grandeur «longueur du chemin» par une quantité nommée «action» du chemin. On peut définir l'action comme ➤

> une sorte de moyenne temporelle de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, lorsqu'il suit une trajectoire donnée. Mais ce qui nous intéresse ici est d'utiliser cette grandeur pour identifier les trajectoires physiquement acceptables.

Un théorème de mécanique plus que centenaire, le « principe de moindre action », implique en effet que toute courbe dans notre espace de configuration pour laquelle la valeur de l'action est minimale représente une solution au problème des trois corps de Newton. Une piste pour résoudre mon problème d'éclipses consistait donc à rechercher, parmi tous les chemins fermés et sans collision donnant une suite d'éclipses donnée, lesquels avaient une action minimale.

Pendant dix-sept ans, je m'étais intéressé de près à cette stratégie – chercher à minimiser l'action de boucles ayant une suite d'éclipses donnée dans un espace de configuration –, stratégie qui avait offert de jolis résultats. Par exemple, en 2000, Alain Chenciner, de l'université Paris-Diderot, et moi-même avions redécouvert de cette manière ce qui semble être la première solution périodique connue du problème des trois corps avec un moment cinétique nul (le moment cinétique est une mesure de la quantité totale de « rotation » d'un système massif; elle est constante dans le temps pour une orbite donnée; les solutions d'Euler et de Lagrange correspondent toutes à un moment cinétique non nul).

Notre solution était une orbite en forme de 8, découverte originellement en 1993 par Cris Moore, de l'Institut de Santa Fe. Dans cette configuration, trois astres de même masse se déplacent le long d'un 8, dans un plan. La suite d'éclipses associée est 123123..., la séquence 123 se répétant à l'infini. Notre travail a popularisé la figure en 8 et fourni une preuve rigoureuse de l'existence de cette solution. Il a aussi entraîné la découverte successive, tout au long des années 2000, de nombreuses solutions nouvelles du problème de N corps de masses égales, des orbites nommées « chorégraphies » par Carlos Simó, lequel a lui-même découvert des centaines de familles de ce type. L'orbite en forme de 8 apparaît même dans un fameux roman de science-fiction de Liu Cixin, publié en 2008, dont le titre a été traduit en *Le Problème à trois corps*.

Le lendemain matin du jour où j'avais fait part de mes réflexions à Carlos Simó, il m'a dit quelque chose qui m'a

profondément marqué: « Richard, j'ai réfléchi à ton problème. Si ce que tu conjectures à propos de ta question est vrai, alors il doit y avoir un mécanisme dynamique sous-jacent. » En d'autres termes, si j'avais raison de penser que la réponse à ma question était « oui », alors cela devait s'expliquer de manière concrète par la façon dont les corps se meuvent, et le mode de recherche plus abstrait que j'avais adopté en travaillant sur l'action n'était pas la démarche adaptée.

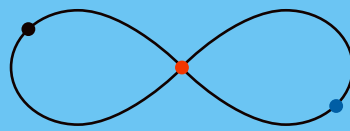
Ces quelques mots m'ont fait douter de mes convictions et m'ont poussé à mettre un terme à dix-sept ans de tentatives de répondre à ma question en minimisant l'action. Quels mécanismes dynamiques comprenais-je vraiment dans ce problème? J'en ai compté deux, dont un seulement me donnait l'espoir d'avancer. Ce mécanisme est lié au chaos découvert par Poincaré et dû à l'extrême sensibilité des solutions aux conditions initiales. Il est relatif au comportement complexe des solutions lorsqu'elles s'approchent – sans l'atteindre – d'une « collision triple » (une collision simultanée des trois corps) dans le problème des trois corps. Cela m'a amené à réfléchir sur d'anciens travaux d'un de mes collègues récents, Rick Moeckel, de l'université du Minnesota.

Dans les années 1980, ce chercheur avait exploré ce mécanisme et montré que l'étude du comportement des solutions au voisinage des collisions triples donnait des résultats intéressants. En relisant ses vieux articles, il m'est apparu que Rick Moeckel avait peut-être la clé de mon problème. J'ai pris contact avec lui et, en quelques jours, nous avons répondu à ma question! Enfin, presque. Nous avons répondu à une question infiniment proche.

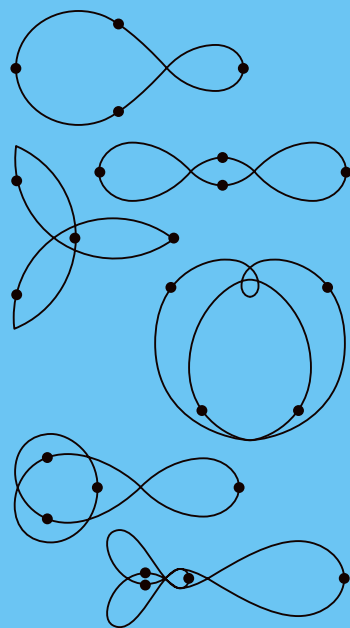
LA « SPHÈRE DES FORMES », UN CONDENSÉ DES MOUVEMENTS POSSIBLES

Pour comprendre le mécanisme dynamique que Rick Moeckel avait étudié et pourquoi l'espace de configuration du problème des trois corps équivaut au plan $x-y$ doublement époincé, comme je l'ai dit plus haut, il est nécessaire d'introduire un objet mathématique nommé la « sphère des formes ». Lorsque les trois corps sont en mouvement dans un plan, ils forment à chaque instant les sommets d'un triangle. Au lieu d'enregistrer la position de chacun des sommets, ne gardons trace, au fil du temps, que de la

SOLUTION EN FORME DE 8



NOUVELLES ORBITES (À 4 CORPS)



FORMES

