

> une sorte de moyenne temporelle de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, lorsqu'il suit une trajectoire donnée. Mais ce qui nous intéresse ici est d'utiliser cette grandeur pour identifier les trajectoires physiquement acceptables.

Un théorème de mécanique plus que centenaire, le « principe de moindre action », implique en effet que toute courbe dans notre espace de configuration pour laquelle la valeur de l'action est minimale représente une solution au problème des trois corps de Newton. Une piste pour résoudre mon problème d'éclipses consistait donc à rechercher, parmi tous les chemins fermés et sans collision donnant une suite d'éclipses donnée, lesquels avaient une action minimale.

Pendant dix-sept ans, je m'étais intéressé de près à cette stratégie – chercher à minimiser l'action de boucles ayant une suite d'éclipses donnée dans un espace de configuration –, stratégie qui avait offert de jolis résultats. Par exemple, en 2000, Alain Chenciner, de l'université Paris-Diderot, et moi-même avions redécouvert de cette manière ce qui semble être la première solution périodique connue du problème des trois corps avec un moment cinétique nul (le moment cinétique est une mesure de la quantité totale de « rotation » d'un système massif; elle est constante dans le temps pour une orbite donnée; les solutions d'Euler et de Lagrange correspondent toutes à un moment cinétique non nul).

Notre solution était une orbite en forme de 8, découverte originellement en 1993 par Cris Moore, de l'Institut de Santa Fe. Dans cette configuration, trois astres de même masse se déplacent le long d'un 8, dans un plan. La suite d'éclipses associée est 123123..., la séquence 123 se répétant à l'infini. Notre travail a popularisé la figure en 8 et fourni une preuve rigoureuse de l'existence de cette solution. Il a aussi entraîné la découverte successive, tout au long des années 2000, de nombreuses solutions nouvelles du problème de N corps de masses égales, des orbites nommées « chorégraphies » par Carlos Simó, lequel a lui-même découvert des centaines de familles de ce type. L'orbite en forme de 8 apparaît même dans un fameux roman de science-fiction de Liu Cixin, publié en 2008, dont le titre a été traduit en *Le Problème à trois corps*.

Le lendemain matin du jour où j'avais fait part de mes réflexions à Carlos Simó, il m'a dit quelque chose qui m'a

profondément marqué: « Richard, j'ai réfléchi à ton problème. Si ce que tu conjectures à propos de ta question est vrai, alors il doit y avoir un mécanisme dynamique sous-jacent. » En d'autres termes, si j'avais raison de penser que la réponse à ma question était « oui », alors cela devait s'expliquer de manière concrète par la façon dont les corps se meuvent, et le mode de recherche plus abstrait que j'avais adopté en travaillant sur l'action n'était pas la démarche adaptée.

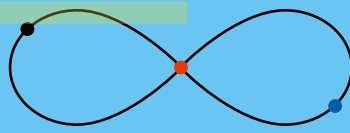
Ces quelques mots m'ont fait douter de mes convictions et m'ont poussé à mettre un terme à dix-sept ans de tentatives de répondre à ma question en minimisant l'action. Quels mécanismes dynamiques comprenais-je vraiment dans ce problème? J'en ai compté deux, dont un seulement me donnait l'espoir d'avancer. Ce mécanisme est lié au chaos découvert par Poincaré et dû à l'extrême sensibilité des solutions aux conditions initiales. Il est relatif au comportement complexe des solutions lorsqu'elles s'approchent – sans l'atteindre – d'une « collision triple » (une collision simultanée des trois corps) dans le problème des trois corps. Cela m'a amené à réfléchir sur d'anciens travaux d'un de mes collègues récents, Rick Moeckel, de l'université du Minnesota.

Dans les années 1980, ce chercheur avait exploré ce mécanisme et montré que l'étude du comportement des solutions au voisinage des collisions triples donnait des résultats intéressants. En relisant ses vieux articles, il m'est apparu que Rick Moeckel avait peut-être la clé de mon problème. J'ai pris contact avec lui et, en quelques jours, nous avons répondu à ma question! Enfin, presque. Nous avons répondu à une question infiniment proche.

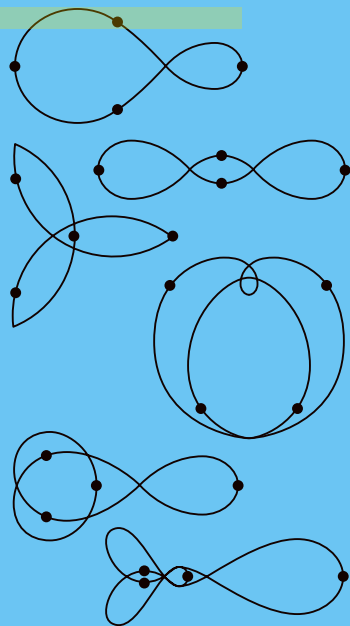
LA « SPHÈRE DES FORMES », UN CONDENSÉ DES MOUVEMENTS POSSIBLES

Pour comprendre le mécanisme dynamique que Rick Moeckel avait étudié et pourquoi l'espace de configuration du problème des trois corps équivaut au plan $x-y$ doublement époincé, comme je l'ai dit plus haut, il est nécessaire d'introduire un objet mathématique nommé la « sphère des formes ». Lorsque les trois corps sont en mouvement dans un plan, ils forment à chaque instant les sommets d'un triangle. Au lieu d'enregistrer la position de chacun des sommets, ne gardons trace, au fil du temps, que de la

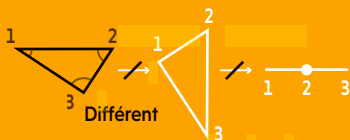
SOLUTION EN FORME DE 8



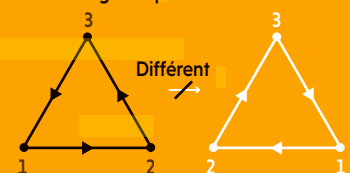
NOUVELLES ORBITES (À 4 CORPS)



FORMES



Deux triangles équilatéraux



Point de Lagrange 4 Point de Lagrange 5

forme globale du triangle qu'ils dessinent. On obtient une courbe sur la sphère des formes, une sphère où chaque point représente une «forme» de triangle.

Qu'est-ce qu'une «forme»? Deux figures dans le plan ont la même forme si l'on peut passer de l'une à l'autre par translation, rotation ou dilatation. L'opération consistant à passer d'une configuration possible du problème des trois corps – c'est-à-dire la connaissance de la position des trois sommets du triangle – à un point de la sphère des formes est un processus qui «oublie» la taille du triangle, la position de son centre de gravité et l'orientation du triangle dans le plan.

Il est facile de comprendre pourquoi l'espace décrivant les formes est de dimension 2 grâce à des faits géométriques élémentaires. La forme d'un triangle, définie comme ci-dessus, est entièrement déterminée par la connaissance de ses trois angles; mais, comme la somme des mesures des trois angles fait toujours 180 degrés, on n'a en fait besoin que des deux premiers angles parmi les trois. Deux nombres suffisent donc pour caractériser la forme d'un triangle. Le fait que cet espace des formes soit une sphère est plus difficile à comprendre, et nous ne le justifierons pas ici.

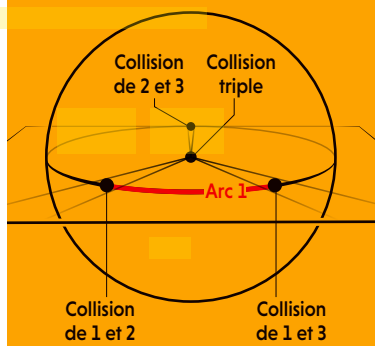
Comment décrit-on l'ensemble des formes de triangles sur une telle sphère? Cela requiert que l'on permette aux triangles d'être «dégénérés», c'est-à-dire d'avoir leurs trois «sommets» alignés. En prenant en compte tous les rapports de distances possibles entre les trois «sommets», on dessine exactement l'équateur de la sphère des formes. Ces triangles dégénérés, qui sont d'aire nulle, représentent les éclipses. Parmi eux figurent notamment les collisions de deux corps, ou «collisions binaires»: en effet, un triangle dont deux sommets sont confondus est automatiquement dégénéré. La sphère des formes compte ainsi exactement trois triangles de collision binaire, notés 12, 13 et 23 selon les sommets confondus.

On retrouve les triangles non dégénérés sur le reste de la sphère des formes, en dehors de l'équateur. Chacun de ces triangles correspond à un point de la sphère, à une certaine distance de l'équateur le long de la sphère. Cette distance est elle-même donnée par le rapport A/r^2 où A est l'aire du triangle et r sa taille (ce rapport est donc une aire normalisée de façon que des triangles de tailles différentes soient comparables). Ici, la «taille» d'un triangle est une mesure géométrique

unidimensionnelle de sa grandeur, contrairement à l'aire. Ainsi, aucun des triangles représentés par la sphère des formes n'est de taille nulle, car aucun n'est réduit à un point. Les pôles nord et sud de la sphère, situés à distance maximale de l'équateur, représentent donc les triangles d'aire maximale (pour une taille donnée) et sont par conséquent équilatéraux.

Mais pourquoi y en a-t-il deux? Parce que l'ordre de leurs sommets diffère. Il n'y a aucun moyen de passer de l'un de ces triangles équilatéraux à l'autre par translation, rotation et dilatation: ils représentent véritablement des formes différentes. En revanche, une réflexion (une symétrie miroir par rapport à n'importe quel plan dans l'espace) fait passer d'un triangle à l'autre. Cette opération de réflexion agit sur tous les triangles – et donc sur les points de la sphère des formes – par symétrie par rapport à l'équateur, en laissant fixes les points de l'équateur (qui représentent les triangles dégénérés) et en échangeant les hémisphères nord et sud.

LA SPHÈRE DES FORMES (1)



Pendant dix-sept ans, j'ai cherché à minimiser l'«action» de boucles à suite d'éclipses donnée

Je peux maintenant vous expliquer comment la sphère des formes montre que l'ensemble des configurations du problème des trois corps est bien topologiquement identique au plan $x-y$ doublement épointé. Pour cela, il nous faut montrer qu'une sphère privée d'un point est assimilable au plan $x-y$ classique. Une manière de le comprendre est d'utiliser la projection stéréographique, qui projette une sphère privée d'un seul point (qui fait office de «source de lumière») sur le plan $x-y$ usuel. Chaque point de la sphère épointée est projeté sur le plan $x-y$ par la droite qui relie ce point à la source de lumière. Si l'on considère des points de la sphère de plus en plus proches de la source de lumière, leur point image par la projection stéréographique sur le plan s'échappe à l'infini; on >

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

