

forme globale du triangle qu'ils dessinent. On obtient une courbe sur la sphère des formes, une sphère où chaque point représente une «forme» de triangle.

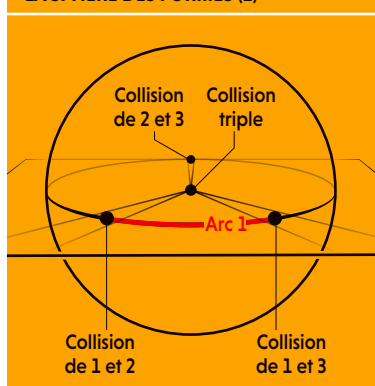
Qu'est-ce qu'une «forme»? Deux figures dans le plan ont la même forme si l'on peut passer de l'une à l'autre par translation, rotation ou dilatation. L'opération consistant à passer d'une configuration possible du problème des trois corps – c'est-à-dire la connaissance de la position des trois sommets du triangle – à un point de la sphère des formes est un processus qui «oublie» la taille du triangle, la position de son centre de gravité et l'orientation du triangle dans le plan.

Il est facile de comprendre pourquoi l'espace décrivant les formes est de dimension 2 grâce à des faits géométriques élémentaires. La forme d'un triangle, définie comme ci-dessus, est entièrement déterminée par la connaissance de ses trois angles; mais, comme la somme des mesures des trois angles fait toujours 180 degrés, on n'a en fait besoin que des deux premiers angles parmi les trois. Deux nombres suffisent donc pour caractériser la forme d'un triangle. Le fait que cet espace des formes soit une sphère est plus difficile à comprendre, et nous ne le justifierons pas ici.

Comment décrit-on l'ensemble des formes de triangles sur une telle sphère? Cela requiert que l'on permette aux triangles d'être «dégénérés», c'est-à-dire d'avoir leurs trois «sommets» alignés. En prenant en compte tous les rapports de distances possibles entre les trois «sommets», on dessine exactement l'équateur de la sphère des formes. Ces triangles dégénérés, qui sont d'aire nulle, représentent les éclipses. Parmi eux figurent notamment les collisions de deux corps, ou «collisions binaires»: en effet, un triangle dont deux sommets sont confondus est automatiquement dégénéré. La sphère des formes compte ainsi exactement trois triangles de collision binaire, notés 12, 13 et 23 selon les sommets confondus.

On retrouve les triangles non dégénérés sur le reste de la sphère des formes, en dehors de l'équateur. Chacun de ces triangles correspond à un point de la sphère, à une certaine distance de l'équateur le long de la sphère. Cette distance est elle-même donnée par le rapport A/r^2 où A est l'aire du triangle et r sa taille (ce rapport est donc une aire normalisée de façon que des triangles de tailles différentes soient comparables). Ici, la «taille» d'un triangle est une mesure géométrique

LA SPHÈRE DES FORMES (1)



unidimensionnelle de sa grandeur, contrairement à l'aire. Ainsi, aucun des triangles représentés par la sphère des formes n'est de taille nulle, car aucun n'est réduit à un point. Les pôles nord et sud de la sphère, situés à distance maximale de l'équateur, représentent donc les triangles d'aire maximale (pour une taille donnée) et sont par conséquent équilatéraux.

Mais pourquoi y en a-t-il deux? Parce que l'ordre de leurs sommets diffère. Il n'y a aucun moyen de passer de l'un de ces triangles équilatéraux à l'autre par translation, rotation et dilatation: ils représentent véritablement des formes différentes. En revanche, une réflexion (une symétrie miroir par rapport à n'importe quel plan dans l'espace) fait passer d'un triangle à l'autre. Cette opération de réflexion agit sur tous les triangles – et donc sur les points de la sphère des formes – par symétrie par rapport à l'équateur, en laissant fixes les points de l'équateur (qui représentent les triangles dégénérés) et en échangeant les hémisphères nord et sud.

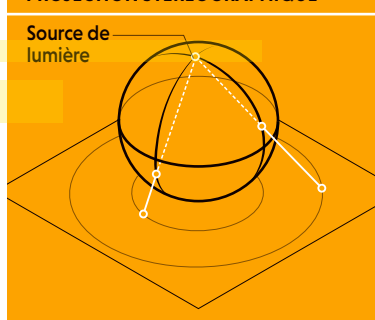


Pendant dix-sept ans, j'ai cherché à minimiser l'«action» de boucles à suite d'éclipses donnée



Je peux maintenant vous expliquer comment la sphère des formes montre que l'ensemble des configurations du problème des trois corps est bien topologiquement identique au plan x - y doublement épointé. Pour cela, il nous faut montrer qu'une sphère privée d'un point est assimilable au plan x - y classique. Une manière de le comprendre est d'utiliser la projection stéréographique, qui projette une sphère privée d'un seul point (qui fait office de «source de lumière») sur le plan x - y usuel. Chaque point de la sphère épointée est projeté sur le plan x - y par la droite qui relie ce point à la source de lumière. Si l'on considère des points de la sphère de plus en plus proches de la source de lumière, leur point image par la projection stéréographique sur le plan s'échappe à l'infini; on >

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

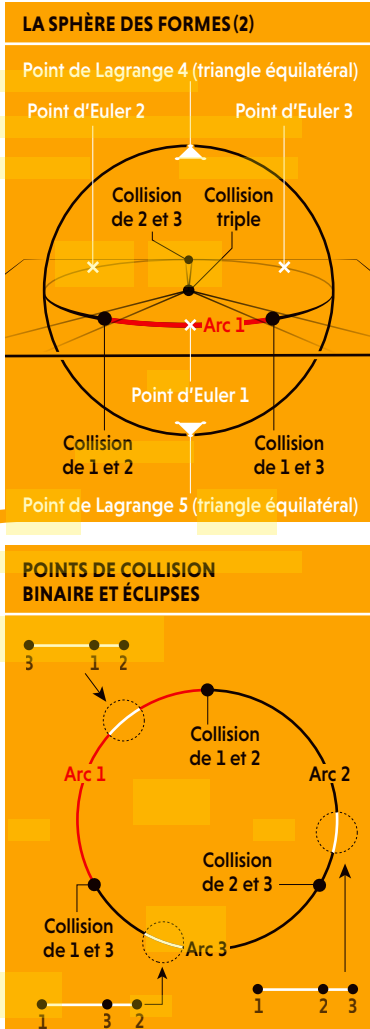


> peut donc aussi dire que le plan x - y auquel on a ajouté un point à l'infini est topologiquement identique à une sphère (source de lumière incluse).

Une question se pose cependant : quel point choisir comme source de lumière ? Une possibilité assez naturelle est de choisir le pôle nord, mais il y a plus judicieux pour notre problème : si l'on prend plutôt comme source de lumière le point de collision 13, en faisant basculer toute la sphère pour que ce point soit au « sommet » de la sphère – à l'emplacement originel de son pôle nord –, le point à l'infini du plan x - y correspond maintenant, par la projection stéréographique, à ce point 13. Et si l'on oriente de plus la sphère pour que son plan équatorial contienne l'axe des x du plan x - y , la projection stéréographique met en correspondance l'équateur de la sphère, contenant les triangles dégénérés, et l'axe des x du plan ; de plus, les deux autres points de collision (12 et 23) sont envoyés sur deux points distincts sur l'axe des x . Il ne reste plus qu'à retirer les deux points de collision sur la sphère en même temps que leur image dans le plan, et l'on obtient l'équivalence recherchée entre l'ensemble des configurations du problème des trois corps et le plan x - y doublement épointé.

Les points de collision binaire sont trois points spéciaux sur la sphère des formes. En dehors de ces trois points, il existe cinq autres points spéciaux sur la sphère des formes, nommés « configurations centrales ». Ces cinq configurations centrales correspondent aux cinq familles de solutions découvertes par Euler et Lagrange, qui sont d'ailleurs les seules solutions pour lesquelles la forme du triangle est constante. Dans les solutions de Lagrange, le triangle est équilatéral à tout instant. Comme on l'a vu, elles sont au nombre de deux ; elles constituent les pôles nord et sud de la sphère des formes et on les nomme « point de Lagrange 4 » et « point de Lagrange 5 ».

Les trois autres configurations spéciales sont les « configurations d'Euler », nommées « point d'Euler 1 », « point d'Euler 2 » et « point d'Euler 3 ». Ce sont des configurations dégénérées où les trois masses sont alignées ; elles sont donc situées sur l'équateur de la sphère des formes. Plus précisément, elles sont disposées entre les trois points de collision ; leur distance aux points de collision sur l'équateur dépend d'ailleurs des rapports de masse entre les trois corps. Le point d'Euler 1, par exemple, est situé sur l'arc



de l'équateur noté 1, comme toute configuration dans laquelle le corps 1 est situé entre les corps 2 et 3. (Souvent, les cinq configurations centrales sont toutes nommées points de Lagrange, celles d'Euler étant notées « L1 », « L2 » et « L3 ». Dans la suite, nous noterons ces cinq configurations « E1 », « E2 », « E3 », « L4 » et « L5 ».)

Une autre manière de comprendre les cinq configurations centrales est d'imaginer ce qui se passe lorsqu'on dispose les trois corps dans l'espace, sans vitesse initiale, et qu'on laisse évoluer le système à partir de ces conditions. Dans le cas général, toutes sortes de choses se produisent alors : des collisions binaires, des ballets déchainés, et, parfois, un corps qui s'échappe à l'infini. Mais lorsqu'on dispose les corps selon l'une des configurations centrales, le triangle qu'ils déterminent garde la même forme à tout instant et rétrécit simplement jusqu'à se réduire à un point, les corps s'attirant les uns les autres jusqu'à ce que la solution se termine en une collision simultanée des trois corps – une collision triple.

Ces cinq configurations centrales correspondent donc à des positionnements des trois corps tels que, si ces derniers sont lâchés sans vitesse, ils entrent en collision triple sans déformation du triangle qu'ils forment. Cependant, s'ils ont des vitesses initiales non nulles bien choisies, on retrouve les orbites décrites par Euler ou Lagrange (d'où le nom des configurations centrales sur la sphère des formes). Avec des vitesses quelconques, en revanche, le comportement du système est chaotique et donne toutes sortes de trajectoires, bien que les positions de départ aient formé un triangle équilatéral.

LES CINQ CHEMINS VERS LA COLLISION TRIPLE

La collision triple est une singularité essentielle du problème des trois corps, tel un « Big Bang » au cœur du problème. Elle est à l'origine d'une grande partie du chaos qu'il contient et de la difficulté à le résoudre. Au début du xx^e siècle, le mathématicien finnois Karl Sundman a démontré que les cinq configurations centrales où les trois corps sont initialement immobiles sont les seuls chemins vers la collision triple. Cela signifie plus généralement que toute solution qui finit en collision triple doit s'approcher de cette collision d'une manière similaire à l'une des configurations centrales : la forme du triangle de la solution doit s'approcher infiniment près de

la forme du triangle de cette configuration centrale. Les configurations centrales sont donc en quelque sorte «universelles», en ce sens qu'elles correspondent aux cinq seules formes possibles d'une solution s'approchant d'une collision triple.

Le travail de Sundman était une prouesse faisant dialoguer de manière complexe l'algèbre et l'analyse. Plus tard, l'année où j'ai terminé mon lycée (je n'avais alors jamais entendu parler du problème des trois corps), le mathématicien américain Richard McGehee a inventé une méthode dite «de l'éclatement», qui permettait de mieux comprendre visuellement le travail de Sundman et d'étudier en détail la dynamique du système près de la collision triple.

La taille du triangle, r , représente aussi la distance d'une configuration à la collision triple. Lorsque r tend vers zéro et que l'on se rapproche de la collision triple, le comportement des équations newtoniennes du mouvement devient pathologique, avec des termes qui tendent vers l'infini. Richard McGehee a trouvé un changement de variables, impliquant l'espace de configuration et la variable de temps, qui diminue la vitesse d'approche vers la collision triple et remplace le point de collision triple, correspondant à $r=0$, par un nouvel ensemble de points, nommé la «variété de collision». Surprise: la variété de collision est essentiellement une copie de la sphère des formes! La méthode de Richard McGehee permet en substance d'étendre les équations du mouvement, au départ valides seulement pour $r>0$, en un système d'équations différentielles qui garde son sens lorsque $r=0$.

Les équations du mouvement n'ont pas de point d'équilibre, ce qui signifie qu'il n'y a pas de configuration dans laquelle les trois corps restent au repos: trois étoiles dans l'espace, qui s'attirent les unes les autres, ne peuvent pas juste rester là où elles sont sans bouger. Mais lorsqu'on étend les équations du mouvement à la variété de collision, des points d'équilibre apparaissent. Il y en a exactement dix: deux pour chacune des cinq configurations centrales de la sphère des formes. L'un des deux éléments de chaque paire représente l'état final d'une configuration centrale «lâchée» avec une vitesse initiale nulle et qui se termine en collision triple.

Pour comprendre ce que représente l'autre élément, il faut imaginer que l'on regarde le film de cette collision triple à

l'envers. Comme les équations newtoniennes du mouvement sont les mêmes lorsque le temps s'écoule à l'envers – on dit qu'elles sont «réversibles» –, il est possible de faire se dérouler une solution en remontant le temps. On obtient ainsi une autre solution. Lorsque l'on renverse de cette façon le déroulement d'une configuration centrale «lâchée» avec une vitesse initiale nulle, qui «implose» en une collision triple, on obtient une solution qui «explose» en partant de cette collision triple, atteignant une taille maximale qui n'est autre que la configuration centrale considérée, l'état initial du «lâcher». L'autre élément de la paire représente donc la configuration initiale de cette solution «explosive» – on parle d'«éjection» –, à l'instant (inexistant dans la réalité physique) où les trois corps sont encore «collés» en un même point.

Ensemble, ces deux solutions liées à une configuration centrale – éjection et collision – se recollent bien et forment une solution d'éjection-collision unique qui quitte le point d'équilibre $r=0$ pour entrer dans le domaine où $r>0$, où elle atteint sa taille maximale, avant de rapetisser sous l'effet de la gravité pour revenir au point de collision triple correspondant dans la variété de collision. Cette solution complète relie l'un à l'autre les deux éléments d'une paire.

En créant ces points d'équilibre associés aux configurations centrales, au cœur du problème des trois corps, Richard McGehee a donné à Rick Moeckel les clés pour appliquer avantageusement des résultats récents sur les systèmes dynamiques – des résultats inconnus de Newton, Lagrange ou Sundman – au problème des trois corps. Et c'était cette approche dynamique qui m'était revenue à l'esprit après les paroles de Carles Simó et qui m'avait conduit à contacter Rick Moeckel.

LE CHEMIN DE MOECKEL

En effet, en explorant les articles que Rick Moeckel avait publiés sur le sujet dans les années 1980, j'avais remarqué le schéma d'un graphe à cinq sommets, correspondant aux cinq configurations centrales, et reliés par des arêtes.

Un «chemin» sur un graphe est un parcours qui va de sommet en sommet, en passant par les arêtes reliant ces sommets. Rick Moeckel avait démontré que, si l'on suppose les masses des trois corps suffisamment proches, tout chemin sur ce graphe correspond à une solution du problème des trois corps qui s'approche ➤

GRAPHE DE MOECKEL

