

la forme du triangle de cette configuration centrale. Les configurations centrales sont donc en quelque sorte « universelles », en ce sens qu'elles correspondent aux cinq seules formes possibles d'une solution s'approchant d'une collision triple.

Le travail de Sundman était une prouesse faisant dialoguer de manière complexe l'algèbre et l'analyse. Plus tard, l'année où j'ai terminé mon lycée (je n'avais alors jamais entendu parler du problème des trois corps), le mathématicien américain Richard McGehee a inventé une méthode dite « de l'éclatement », qui permettait de mieux comprendre visuellement le travail de Sundman et d'étudier en détail la dynamique du système près de la collision triple.

La taille du triangle, r , représente aussi la distance d'une configuration à la collision triple. Lorsque r tend vers zéro et que l'on se rapproche de la collision triple, le comportement des équations newtoniennes du mouvement devient pathologique, avec des termes qui tendent vers l'infini. Richard McGehee a trouvé un changement de variables, impliquant l'espace de configuration et la variable de temps, qui diminue la vitesse d'approche vers la collision triple et remplace le point de collision triple, correspondant à $r=0$, par un nouvel ensemble de points, nommé la « variété de collision ». Surprise : la variété de collision est essentiellement une copie de la sphère des formes ! La méthode de Richard McGehee permet en substance d'étendre les équations du mouvement, au départ valides seulement pour $r>0$, en un système d'équations différentielles qui garde son sens lorsque $r=0$.

Les équations du mouvement n'ont pas de point d'équilibre, ce qui signifie qu'il n'y a pas de configuration dans laquelle les trois corps restent au repos : trois étoiles dans l'espace, qui s'attirent les unes les autres, ne peuvent pas juste rester là où elles sont sans bouger. Mais lorsqu'on étend les équations du mouvement à la variété de collision, des points d'équilibre apparaissent. Il y en a exactement dix : deux pour chacune des cinq configurations centrales de la sphère des formes. L'un des deux éléments de chaque paire représente l'état final d'une configuration centrale « lâchée » avec une vitesse initiale nulle et qui se termine en collision triple.

Pour comprendre ce que représente l'autre élément, il faut imaginer que l'on regarde le film de cette collision triple à

l'envers. Comme les équations newtoniennes du mouvement sont les mêmes lorsque le temps s'écoule à l'envers – on dit qu'elles sont « réversibles » –, il est possible de faire se dérouler une solution en remontant le temps. On obtient ainsi une autre solution. Lorsque l'on renverse de cette façon le déroulement d'une configuration centrale « lâchée » avec une vitesse initiale nulle, qui « implose » en une collision triple, on obtient une solution qui « explose » en partant de cette collision triple, atteignant une taille maximale qui n'est autre que la configuration centrale considérée, l'état initial du « lâcher ». L'autre élément de la paire représente donc la configuration initiale de cette solution « explosive » – on parle d'« éjection » –, à l'instant (inexistant dans la réalité physique) où les trois corps sont encore « collés » en un même point.

Ensemble, ces deux solutions liées à une configuration centrale – éjection et collision – se recollent bien et forment une solution d'éjection-collision unique qui quitte le point d'équilibre $r=0$ pour entrer dans le domaine où $r>0$, où elle atteint sa taille maximale, avant de rapetisser sous l'effet de la gravité pour revenir au point de collision triple correspondant dans la variété de collision. Cette solution complète relie l'un à l'autre les deux éléments d'une paire.

En créant ces points d'équilibre associés aux configurations centrales, au cœur du problème des trois corps, Richard McGehee a donné à Rick Moeckel les clés pour appliquer avantageusement des résultats récents sur les systèmes dynamiques – des résultats inconnus de Newton, Lagrange ou Sundman – au problème des trois corps. Et c'était cette approche dynamique qui m'était revenue à l'esprit après les paroles de Carles Simó et qui m'avait conduit à contacter Rick Moeckel.

LE CHEMIN DE MOECKEL

En effet, en explorant les articles que Rick Moeckel avait publiés sur le sujet dans les années 1980, j'avais remarqué le schéma d'un graphe à cinq sommets, correspondant aux cinq configurations centrales, et reliés par des arêtes.

Un « chemin » sur un graphe est un parcours qui va de sommet en sommet, en passant par les arêtes reliant ces sommets. Rick Moeckel avait démontré que, si l'on suppose les masses des trois corps suffisamment proches, tout chemin sur ce graphe correspond à une solution du problème des trois corps qui s'approche ➤

GRAPHE DE MOECKEL

