

la forme du triangle de cette configuration centrale. Les configurations centrales sont donc en quelque sorte « universelles », en ce sens qu'elles correspondent aux cinq seules formes possibles d'une solution s'approchant d'une collision triple.

Le travail de Sundman était une prouesse faisant dialoguer de manière complexe l'algèbre et l'analyse. Plus tard, l'année où j'ai terminé mon lycée (je n'avais alors jamais entendu parler du problème des trois corps), le mathématicien américain Richard McGehee a inventé une méthode dite « de l'éclatement », qui permettait de mieux comprendre visuellement le travail de Sundman et d'étudier en détail la dynamique du système près de la collision triple.

La taille du triangle, r , représente aussi la distance d'une configuration à la collision triple. Lorsque r tend vers zéro et que l'on se rapproche de la collision triple, le comportement des équations newtoniennes du mouvement devient pathologique, avec des termes qui tendent vers l'infini. Richard McGehee a trouvé un changement de variables, impliquant l'espace de configuration et la variable de temps, qui diminue la vitesse d'approche vers la collision triple et remplace le point de collision triple, correspondant à $r=0$, par un nouvel ensemble de points, nommé la « variété de collision ». Surprise : la variété de collision est essentiellement une copie de la sphère des formes ! La méthode de Richard McGehee permet en substance d'étendre les équations du mouvement, au départ valides seulement pour $r>0$, en un système d'équations différentielles qui garde son sens lorsque $r=0$.

Les équations du mouvement n'ont pas de point d'équilibre, ce qui signifie qu'il n'y a pas de configuration dans laquelle les trois corps restent au repos : trois étoiles dans l'espace, qui s'attirent les unes les autres, ne peuvent pas juste rester là où elles sont sans bouger. Mais lorsqu'on étend les équations du mouvement à la variété de collision, des points d'équilibre apparaissent. Il y en a exactement dix : deux pour chacune des cinq configurations centrales de la sphère des formes. L'un des deux éléments de chaque paire représente l'état final d'une configuration centrale « lâchée » avec une vitesse initiale nulle et qui se termine en collision triple.

Pour comprendre ce que représente l'autre élément, il faut imaginer que l'on regarde le film de cette collision triple à

l'envers. Comme les équations newtoniennes du mouvement sont les mêmes lorsque le temps s'écoule à l'envers – on dit qu'elles sont « réversibles » –, il est possible de faire se dérouler une solution en remontant le temps. On obtient ainsi une autre solution. Lorsque l'on renverse de cette façon le déroulement d'une configuration centrale « lâchée » avec une vitesse initiale nulle, qui « implose » en une collision triple, on obtient une solution qui « explose » en partant de cette collision triple, atteignant une taille maximale qui n'est autre que la configuration centrale considérée, l'état initial du « lâcher ». L'autre élément de la paire représente donc la configuration initiale de cette solution « explosive » – on parle d'« éjection » –, à l'instant (inexistant dans la réalité physique) où les trois corps sont encore « collés » en un même point.

Ensemble, ces deux solutions liées à une configuration centrale – éjection et collision – se recollent bien et forment une solution d'éjection-collision unique qui quitte le point d'équilibre $r=0$ pour entrer dans le domaine où $r>0$, où elle atteint sa taille maximale, avant de rapetisser sous l'effet de la gravité pour revenir au point de collision triple correspondant dans la variété de collision. Cette solution complète relie l'un à l'autre les deux éléments d'une paire.

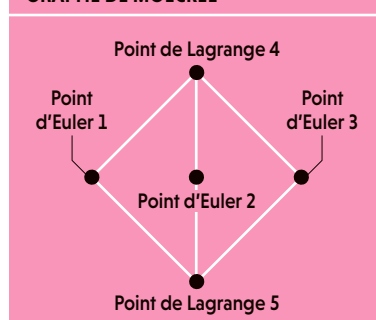
En créant ces points d'équilibre associés aux configurations centrales, au cœur du problème des trois corps, Richard McGehee a donné à Rick Moeckel les clés pour appliquer avantageusement des résultats récents sur les systèmes dynamiques – des résultats inconnus de Newton, Lagrange ou Sundman – au problème des trois corps. Et c'était cette approche dynamique qui m'était revenue à l'esprit après les paroles de Carles Simó et qui m'avait conduit à contacter Rick Moeckel.

LE CHEMIN DE MOECKEL

En effet, en explorant les articles que Rick Moeckel avait publiés sur le sujet dans les années 1980, j'avais remarqué le schéma d'un graphe à cinq sommets, correspondant aux cinq configurations centrales, et reliés par des arêtes.

Un « chemin » sur un graphe est un parcours qui va de sommet en sommet, en passant par les arêtes reliant ces sommets. Rick Moeckel avait démontré que, si l'on suppose les masses des trois corps suffisamment proches, tout chemin sur ce graphe correspond à une solution du problème des trois corps qui s'approche ➤

GRAPHE DE MOECKEL



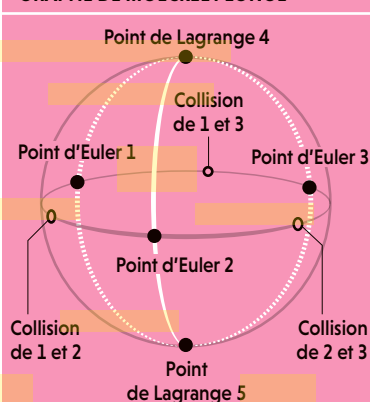
> tour à tour des configurations centrales associées à chaque sommet que le chemin visite.

Par exemple, au chemin E1-L4-E2-L5 correspond une solution qui commence par une éjection très près de la solution d'éjection-collision associée au point d'Euler 1 – les trois astres sont alors presque alignés, comme dans E1 –, grandit jusqu'à un maximum, s'approche ensuite de la phase de collision de la solution associée au point de Lagrange 4, formant presque un triangle équilatéral parfait; mais, au lieu de réaliser exactement cette collision triple, les corps s'éloignent de nouveau en une seconde éjection en triangle équilatéral proche de la phase d'éjection associée au point de Lagrange 4. S'ensuivent une quasi-collision proche de celle, alignée, associée au point d'Euler 2, une éjection quasi alignée toujours liée à E2, pour finir très proche de la collision triple en triangle équilatéral associée au point de Lagrange 5. De plus, si on répète le même chemin sur le graphe de manière périodique, alors il existera une solution correspondante qui sera elle-même périodique.

Peu de temps après que Carles Simó m'a suggéré l'existence d'un mécanisme dynamique, je me suis rendu compte que l'on pouvait plonger le graphe de Moeckel dans la sphère des formes. La propriété cruciale de ce graphe inclus dans la sphère est qu'il contient toute la structure topologique de la sphère privée de ses trois points de collision binaire. En effet, on peut déformer la sphère triplement époincée pour la transformer en ce graphe, ce qui transforme en même temps toute courbe fermée (revenant à son point de départ) sur la sphère époincée en un chemin fermé (revenant à son sommet de départ) sur le graphe.

Pour visualiser cette déformation, imaginons que la sphère soit la surface d'un ballon. Avec une aiguille, faisons trois trous dedans – ce qui revient à retirer des points de la surface –, un pour chaque point de collision binaire. Le ballon étant fait d'un matériau infiniment souple et déformable, on peut étirer les trois trous pour les élargir jusqu'à ce que les bords des trois trous se touchent presque et que le matériau restant forme de fins cordons juste autour des arêtes du graphe de Moeckel. En effectuant cette déformation, toute courbe fermée sur la sphère époincée est déformée en une courbe fermée sur ces cordons, et finalement en un chemin fermé sur le graphe de Moeckel.

GRAPHE DE MOECKEL PLONGÉ



Pour obtenir, à partir de ce processus, un véritable théorème à propos des suites d'éclipses et des solutions du problème des trois corps, je devais prouver que les solutions données par le théorème de Moeckel, vues sur la sphère des formes, ne s'éloignent jamais beaucoup du graphe de Moeckel. En effet, si elles s'en éloignaient, elles pourraient s'enrouler autour des points de collision binaire ou même en rencontrer un, ce qui aurait pour effet d'ajouter ou de supprimer des boucles, et donc de modifier la suite d'éclipses. J'ai donc envoyé un courriel à Rick Moeckel pour lui demander son aide.

Il m'a répondu: «Tu veux me forcer à relire des articles que j'ai écrits il y a plus de vingt ans?» Il s'est néanmoins replongé dans ses anciens travaux et a démontré que les solutions garanties par son théorème ne s'éloignent jamais trop du graphe dans la sphère des formes. Ma question, dans le cas où les masses des corps sont assez proches, était donc résolue – ou presque.

Presque, car Rick Moeckel avait eu besoin d'un petit peu de moment cinétique pour faire fonctionner sa démonstration. À l'inverse, pendant les dix-sept ans de recherches qui avaient précédé ma conversation avec Carles Simó, je ne m'étais intéressé qu'à des solutions de moment cinétique nul. Cela s'expliquait par le fait que les solutions correspondant à des courbes dans l'espace de configuration qui minimisent l'action, c'est-à-dire celles que j'étudiais, ont forcément un moment cinétique nul.

Toujours est-il que Rick Moeckel avait besoin que le moment cinétique soit petit, mais non nul, pour que les solutions restent bien près du graphe dans la sphère des formes. Intuitivement, ce moment cinétique non nul est nécessaire pour que ces solutions puissent s'approcher des configurations d'Euler ou de Lagrange, puisque ces dernières ont un moment cinétique non nul (les corps y tournent dans le «même sens») et que cette grandeur est constante.

Il restait une autre difficulté dans le résultat de Rick Moeckel: ses solutions, lorsqu'elles croisaient l'équateur de la sphère des formes près des points d'Euler E1, E2 ou E3, oscillaient de part et d'autre de l'équateur plusieurs fois avant de finir par s'en éloigner pour rejoindre l'un des points de Lagrange aux pôles. Pour prendre en compte ces oscillations, je dois introduire ici une nouvelle notion: si N est un entier strictement positif, on dit qu'une suite est « N -longue» lorsque,

SUITE D'ÉCLIPSES

