

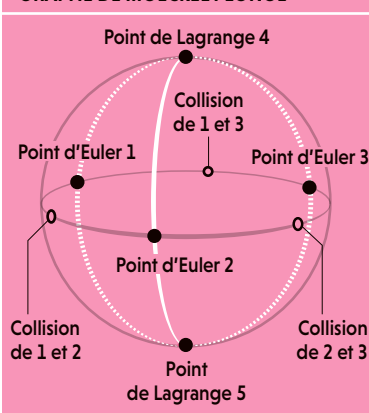
> tour à tour des configurations centrales associées à chaque sommet que le chemin visite.

Par exemple, au chemin E1-L4-E2-L5 correspond une solution qui commence par une éjection très près de la solution d'éjection-collision associée au point d'Euler 1 – les trois astres sont alors presque alignés, comme dans E1 –, grandit jusqu'à un maximum, s'approche ensuite de la phase de collision de la solution associée au point de Lagrange 4, formant presque un triangle équilatéral parfait; mais, au lieu de réaliser exactement cette collision triple, les corps s'éloignent de nouveau en une seconde éjection en triangle équilatéral proche de la phase d'éjection associée au point de Lagrange 4. S'ensuivent une quasi-collision proche de celle, alignée, associée au point d'Euler 2, une éjection quasi alignée toujours liée à E2, pour finir très proche de la collision triple en triangle équilatéral associée au point de Lagrange 5. De plus, si on répète le même chemin sur le graphe de manière périodique, alors il existera une solution correspondante qui sera elle-même périodique.

Peu de temps après que Carles Simó m'a suggéré l'existence d'un mécanisme dynamique, je me suis rendu compte que l'on pouvait plonger le graphe de Moeckel dans la sphère des formes. La propriété cruciale de ce graphe inclus dans la sphère est qu'il contient toute la structure topologique de la sphère privée de ses trois points de collision binaire. En effet, on peut déformer la sphère triplement épointée pour la transformer en ce graphe, ce qui transforme en même temps toute courbe fermée (revenant à son point de départ) sur la sphère épointée en un chemin fermé (revenant à son sommet de départ) sur le graphe.

Pour visualiser cette déformation, imaginons que la sphère soit la surface d'un ballon. Avec une aiguille, faisons trois trous dedans – ce qui revient à retirer des points de la surface –, un pour chaque point de collision binaire. Le ballon étant fait d'un matériau infiniment souple et déformable, on peut étirer les trois trous pour les élargir jusqu'à ce que les bords des trois trous se touchent presque et que le matériau restant forme de fins cordons juste autour des arêtes du graphe de Moeckel. En effectuant cette déformation, toute courbe fermée sur la sphère épointée est déformée en une courbe fermée sur ces cordons, et finalement en un chemin fermé sur le graphe de Moeckel.

GRAPHE DE MOECKEL PLONGÉ



Pour obtenir, à partir de ce processus, un véritable théorème à propos des suites d'éclipses et des solutions du problème des trois corps, je devais prouver que les solutions données par le théorème de Moeckel, vues sur la sphère des formes, ne s'éloignent jamais beaucoup du graphe de Moeckel. En effet, si elles s'en éloignaient, elles pourraient s'enrouler autour des points de collision binaire ou même en rencontrer un, ce qui aurait pour effet d'ajouter ou de supprimer des boucles, et donc de modifier la suite d'éclipses. J'ai donc envoyé un courriel à Rick Moeckel pour lui demander son aide.

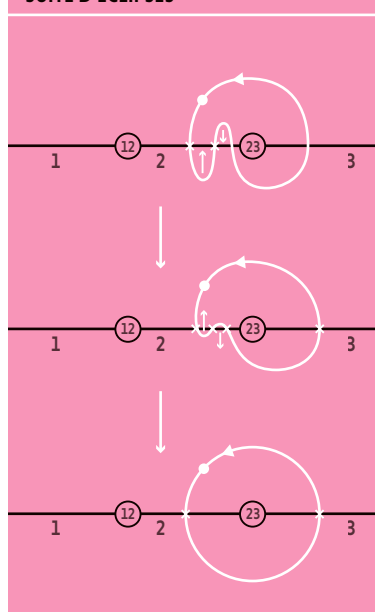
Il m'a répondu: «Tu veux me forcer à relire des articles que j'ai écrits il y a plus de vingt ans?» Il s'est néanmoins replongé dans ses anciens travaux et a démontré que les solutions garanties par son théorème ne s'éloignent jamais trop du graphe dans la sphère des formes. Ma question, dans le cas où les masses des corps sont assez proches, était donc résolue – ou presque.

Presque, car Rick Moeckel avait eu besoin d'un petit peu de moment cinétique pour faire fonctionner sa démonstration. À l'inverse, pendant les dix-sept ans de recherches qui avaient précédé ma conversation avec Carles Simó, je ne m'étais intéressé qu'à des solutions de moment cinétique nul. Cela s'expliquait par le fait que les solutions correspondant à des courbes dans l'espace de configuration qui minimisent l'action, c'est-à-dire celles que j'étudiais, ont forcément un moment cinétique nul.

Toujours est-il que Rick Moeckel avait besoin que le moment cinétique soit petit, mais non nul, pour que les solutions restent bien près du graphe dans la sphère des formes. Intuitivement, ce moment cinétique non nul est nécessaire pour que ces solutions puissent s'approcher des configurations d'Euler ou de Lagrange, puisque ces dernières ont un moment cinétique non nul (les corps y tournent dans le «même sens») et que cette grandeur est constante.

Il restait une autre difficulté dans le résultat de Rick Moeckel: ses solutions, lorsqu'elles croisaient l'équateur de la sphère des formes près des points d'Euler E1, E2 ou E3, oscillaient de part et d'autre de l'équateur plusieurs fois avant de finir par s'en éloigner pour rejoindre l'un des points de Lagrange aux pôles. Pour prendre en compte ces oscillations, je dois introduire ici une nouvelle notion: si N est un entier strictement positif, on dit qu'une suite est « N -longue» lorsque,

SUITE D'ÉCLIPSES



chaque fois qu'un nombre apparaît dans la suite, il est présent au moins N fois d'affilée.

Par exemple, la suite 1112223333222 est 3-longue, mais pas 4-longue, puisqu'il n'y a que trois « 1 » d'affilée.

Voici donc le théorème final auquel nous avons abouti avec Rick Moeckel. Considérons le problème des trois corps avec un petit moment cinétique non nul et des masses proches. Alors il existe un grand entier naturel N vérifiant la propriété suivante: pour n'importe quelle suite d'éclipses N -longue, il existe une solution correspondante du problème des trois corps ayant exactement cette suite d'éclipses. Et si la suite est périodique, alors il existe même une solution périodique qui réalise cette suite d'éclipses.

Et ma question originelle? Aucun entier N n'y apparaissait, et j'y recherchais un résultat valide pour toute suite d'éclipses... On était assez loin du compte! En fait, je ne vous ai pas donné ma vraie question. Ce que je voulais vraiment savoir, c'était si l'on pouvait réaliser n'importe quel «type topologique» de courbe périodique, et non toute suite d'éclipses (on peut définir intuitivement le type topologique comme le «motif d'enroulement» de la courbe autour des trous). J'utilisais la suite d'éclipses comme un raccourci pour cette autre notion, en encodant le type topologique dans la suite d'éclipses.

Mais cette représentation d'un type topologique au moyen de sa suite d'éclipses est redondante: beaucoup de suites d'éclipses différentes encodent le même type topologique. Considérons, par exemple, le type topologique «tourner une fois dans le sens antihoraire autour du point 23». La suite d'éclipses 23 représente ce type topologique. Mais c'est aussi le cas des suites 2223, 22223 ou 2333. En effet, chaque fois que l'on traverse deux fois d'affilée l'arc 2, on peut «oublier» ces deux traversées en déformant les méandres, pour faire en sorte que la courbe traverse l'arc deux fois de moins. De cette façon, on supprime toute paire consécutive du même nombre apparaissant dans une suite d'éclipses sans changer le type topologique de la courbe représentée par cette suite. Cette simplification des suites d'éclipses n'a pas de sens physique, car certaines solutions – qui ont donc une réalité physique – ont des suites d'éclipses présentant des répétitions.

Pour répondre maintenant à ma question grâce à notre théorème principal, remarquons qu'en supprimant une à une les paires de nombres égaux consécutifs, on obtient une suite d'éclipses associée au même type topologique de courbe et qui n'a jamais deux nombres égaux consécutifs: elle ne contient pas les motifs 11, 22 ou 33. Nommons une telle suite une «suite admissible». Considérons alors une suite admissible, par exemple 123232.

En cas de moment cinétique nul, la réponse à ma question de départ est «non»

Choisissons un nombre entier impair n supérieur ou égal à l'entier N de notre théorème, et remplaçons la suite admissible par la suite $1^n 2^n 3^n 2^n 3^n 2^n$, prolongée périodiquement, où les exposants signifient ici que l'on répète le nombre (par exemple, $1^3 = 111$). Par construction, cette suite représente le même type topologique que la suite admissible, car n est impair. Notre théorème nous assure que cette nouvelle suite d'éclipses est réalisée par une solution périodique. Cette solution périodique ayant le même type topologique que la suite de départ, on a montré que la réponse à ma question à propos des types topologiques était «oui».

QUELLES PERSPECTIVES?

Il reste encore beaucoup à faire. Quand j'ai posé ma question à propos des types topologiques, il y a vingt ans, je ne m'intéressais qu'à des solutions de moment cinétique nul; or de plus en plus d'indices liés à des travaux menés ces dernières années suggèrent que la réponse à ma question de départ est «non» en cas de moment cinétique nul. Par exemple, on a des raisons de penser que même le type topologique de la suite périodique non vide la plus simple, 23, n'est jamais réalisé par une solution périodique du problème des trois corps avec des masses toutes égales et à moment cinétique nul.

Quant à la version de la question formulée en termes de suites d'éclipses et non de types topologiques, elle reste encore sans réponse, même pour des moments cinétiques non nuls, puisque le théorème ne permet de réaliser que des suites d'éclipses N -longues pour un certain entier N suffisamment grand. Par exemple, nous ne savons absolument pas comment réaliser des suites admissibles.

En fin de compte, nous n'avons peut-être pas beaucoup avancé dans la résolution complète du problème des trois corps, mais, en chemin, nous avons beaucoup appris. Nous allons continuer à chercher, et ce problème sera probablement encore fructueux pour ceux qui s'y intéresseront. Car manifestement, cette énigme classique de l'histoire des mathématiques n'a pas fini de nous étonner. ■

BIBLIOGRAPHIE

R. Moeckel et R. Montgomery, **Realizing all reduced syzygy sequences in the planar three-body problem**, *Nonlinearity*, vol. 28(6), pp. 1919-1935, 2015 (disponible en ligne : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/28/6/1919/pdf>).

A. Chenciner et R. Montgomery, **A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses**, *Annals of Mathematics*, vol. 152(3), pp. 881-901, 2000 (sur arXiv : <https://arxiv.org/pdf/math/0011268.pdf>).