

chaque fois qu'un nombre apparaît dans la suite, il est présent au moins N fois d'affilée. Par exemple, la suite 1112223333222 est 3-longue, mais pas 4-longue, puisqu'il n'y a que trois « 1 » d'affilée.

Voici donc le théorème final auquel nous avons abouti avec Rick Moeckel. Considérons le problème des trois corps avec un petit moment cinétique non nul et des masses proches. Alors il existe un grand entier naturel N vérifiant la propriété suivante: pour n'importe quelle suite d'éclipses N -longue, il existe une solution correspondante du problème des trois corps ayant exactement cette suite d'éclipses. Et si la suite est périodique, alors il existe même une solution périodique qui réalise cette suite d'éclipses.

Et ma question originelle? Aucun entier N n'y apparaissait, et j'y recherchais un résultat valide pour toute suite d'éclipses... On était assez loin du compte! En fait, je ne vous ai pas donné ma vraie question. Ce que je voulais vraiment savoir, c'était si l'on pouvait réaliser n'importe quel « type topologique » de courbe périodique, et non toute suite d'éclipses (on peut définir intuitivement le type topologique comme le « motif d'enroulement » de la courbe autour des trous). J'utilisais la suite d'éclipses comme un raccourci pour cette autre notion, en encodant le type topologique dans la suite d'éclipses.

Mais cette représentation d'un type topologique au moyen de sa suite d'éclipses est redondante: beaucoup de suites d'éclipses différentes encodent le même type topologique. Considérons, par exemple, le type topologique « tourner une fois dans le sens antihoraire autour du point 23 ». La suite d'éclipses 23 représente ce type topologique. Mais c'est aussi le cas des suites 2223, 22223 ou 2333. En effet, chaque fois que l'on traverse deux fois d'affilée l'arc 2, on peut « oublier » ces deux traversées en déformant les méandres, pour faire en sorte que la courbe traverse l'arc deux fois de moins. De cette façon, on supprime toute paire consécutive du même nombre apparaissant dans une suite d'éclipses sans changer le type topologique de la courbe représentée par cette suite. Cette simplification des suites d'éclipses n'a pas de sens physique, car certaines solutions – qui ont donc une réalité physique – ont des suites d'éclipses présentant des répétitions.

Pour répondre maintenant à ma question grâce à notre théorème principal, remarquons qu'en supprimant une à une les paires de nombres égaux consécutifs, on obtient une suite d'éclipses associée au même type topologique de courbe et qui n'a jamais deux nombres égaux consécutifs: elle ne contient pas les motifs 11, 22 ou 33. Nommons une telle suite une « suite admissible ». Considérons alors une suite admissible, par exemple 123232.

En cas de moment cinétique nul, la réponse à ma question de départ est « non »

Choisissons un nombre entier impair n supérieur ou égal à l'entier N de notre théorème, et remplaçons la suite admissible par la suite $1^n 2^n 3^n 2^n 3^n 2^n$, prolongée périodiquement, où les exposants signifient ici que l'on répète le nombre (par exemple, $1^3 = 111$). Par construction, cette suite représente le même type topologique que la suite admissible, car n est impair. Notre théorème nous assure que cette nouvelle suite d'éclipses est réalisée par une solution périodique. Cette solution périodique ayant le même type topologique que la suite de départ, on a montré que la réponse à ma question à propos des types topologiques était « oui ».

QUELLES PERSPECTIVES?

Il reste encore beaucoup à faire. Quand j'ai posé ma question à propos des types topologiques, il y a vingt ans, je ne m'intéressais qu'à des solutions de moment cinétique nul; or de plus en plus d'indices liés à des travaux menés ces dernières années suggèrent que la réponse à ma question de départ est « non » en cas de moment cinétique nul. Par exemple, on a des raisons de penser que même le type topologique de la suite périodique non vide la plus simple, 23, n'est jamais réalisé par une solution périodique du problème des trois corps avec des masses toutes égales et à moment cinétique nul.

Quant à la version de la question formulée en termes de suites d'éclipses et non de types topologiques, elle reste encore sans réponse, même pour des moments cinétiques non nuls, puisque le théorème ne permet de réaliser que des suites d'éclipses N -longues pour un certain entier N suffisamment grand. Par exemple, nous ne savons absolument pas comment réaliser des suites admissibles.

En fin de compte, nous n'avons peut-être pas beaucoup avancé dans la résolution complète du problème des trois corps, mais, en chemin, nous avons beaucoup appris. Nous allons continuer à chercher, et ce problème sera probablement encore fructueux pour ceux qui s'y intéresseront. Car manifestement, cette énigme classique de l'histoire des mathématiques n'a pas fini de nous étonner. ■

BIBLIOGRAPHIE

R. Moeckel et R. Montgomery, **Realizing all reduced syzygy sequences in the planar three-body problem**, *Nonlinearity*, vol. 28(6), pp. 1919-1935, 2015 (disponible en ligne : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/28/6/1919/pdf>).

A. Chenciner et R. Montgomery, **A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses**, *Annals of Mathematics*, vol. 152(3), pp. 881-901, 2000 (sur arXiv : <https://arxiv.org/pdf/math/0011268.pdf>).