

chaque fois qu'un nombre apparaît dans la suite, il est présent au moins N fois d'affilée. Par exemple, la suite 11122233333222 est 3-longue, mais pas 4-longue, puisqu'il n'y a que trois « 1 » d'affilée.

Voici donc le théorème final auquel nous avons abouti avec Rick Moeckel. Considérons le problème des trois corps avec un petit moment cinétique non nul et des masses proches. Alors il existe un grand entier naturel N vérifiant la propriété suivante: pour n'importe quelle suite d'éclipses N -longue, il existe une solution correspondante du problème des trois corps ayant exactement cette suite d'éclipses. Et si la suite est périodique, alors il existe même une solution périodique qui réalise cette suite d'éclipses.

Et ma question originelle? Aucun entier N n'y apparaissait, et j'y recherchais un résultat valide pour toute suite d'éclipses... On était assez loin du compte! En fait, je ne vous ai pas donné ma vraie question. Ce que je voulais vraiment savoir, c'était si l'on pouvait réaliser n'importe quel «type topologique» de courbe périodique, et non toute suite d'éclipses (on peut définir intuitivement le type topologique comme le «motif d'enroulement» de la courbe autour des trous). J'utilisais la suite d'éclipses comme un raccourci pour cette autre notion, en encodant le type topologique dans la suite d'éclipses.

Mais cette représentation d'un type topologique au moyen de sa suite d'éclipses est redondante: beaucoup de suites d'éclipses différentes encodent le même type topologique. Considérons, par exemple, le type topologique «tourner une fois dans le sens antihoraire autour du point 23». La suite d'éclipses 23 représente ce type topologique. Mais c'est aussi le cas des suites 2223, 222223 ou 2333. En effet, chaque fois que l'on traverse deux fois d'affilée l'arc 2, on peut «oublier» ces deux traversées en déformant les méandres, pour faire en sorte que la courbe traverse l'arc deux fois de moins. De cette façon, on supprime toute paire consécutive du même nombre apparaissant dans une suite d'éclipses sans changer le type topologique de la courbe représentée par cette suite. Cette simplification des suites d'éclipses n'a pas de sens physique, car certaines solutions – qui ont donc une réalité physique – ont des suites d'éclipses présentant des répétitions.

Pour répondre maintenant à ma question grâce à notre théorème principal, remarquons qu'en supprimant une à une les paires de nombres égaux consécutifs, on obtient une suite d'éclipses associée au même type topologique de courbe et qui n'a jamais deux nombres égaux consécutifs: elle ne contient pas les motifs 11, 22 ou 33. Nommons une telle suite une «suite admissible». Considérons alors une suite admissible, par exemple 123232.

En cas de moment cinétique nul, la réponse à ma question de départ est «non»

Choisissons un nombre entier impair n supérieur ou égal à l'entier N de notre théorème, et remplaçons la suite admissible par la suite $1^n 2^n 3^n 2^n 3^n 2^n$, prolongée périodiquement, où les exposants signifient ici que l'on répète le nombre (par exemple, $1^3 = 111$). Par construction, cette suite représente le même type topologique que la suite admissible, car n est impair. Notre théorème nous assure que cette nouvelle suite d'éclipses est réalisée par une solution périodique. Cette solution périodique ayant le même type topologique que la suite de départ, on a montré que la réponse à ma question à propos des types topologiques était «oui».

QUELLES PERSPECTIVES?

Il reste encore beaucoup à faire. Quand j'ai posé ma question à propos des types topologiques, il y a vingt ans, je ne m'intéressais qu'à des solutions de moment cinétique nul; or de plus en plus d'indices liés à des travaux menés ces dernières années suggèrent que la réponse à ma question de départ est «non» en cas de moment cinétique nul. Par exemple, on a des raisons de penser que même le type topologique de la suite périodique non vide la plus simple, 23, n'est jamais réalisé par une solution périodique du problème des trois corps avec des masses toutes égales et à moment cinétique nul.

Quant à la version de la question formulée en termes de suites d'éclipses et non de types topologiques, elle reste encore sans réponse, même pour des moments cinétiques non nuls, puisque le théorème ne permet de réaliser que des suites d'éclipses N -longues pour un certain entier N suffisamment grand. Par exemple, nous ne savons absolument pas comment réaliser des suites admissibles.

En fin de compte, nous n'avons peut-être pas beaucoup avancé dans la résolution complète du problème des trois corps, mais, en chemin, nous avons beaucoup appris. Nous allons continuer à chercher, et ce problème sera probablement encore fructueux pour ceux qui s'y intéresseront. Car manifestement, cette énigme classique de l'histoire des mathématiques n'a pas fini de nous étonner. ■

BIBLIOGRAPHIE

R. Moeckel et R. Montgomery, **Realizing all reduced syzygy sequences in the planar three-body problem**, *Nonlinearity*, vol. 28(6), pp. 1919-1935, 2015 (disponible en ligne : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/28/6/1919/pdf>).

A. Chenciner et R. Montgomery, **A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses**, *Annals of Mathematics*, vol. 152(3), pp. 881-901, 2000 (sur arXiv : <https://arxiv.org/pdf/math/0011268.pdf>).

L'ESSENTIEL

> Les anguilles électriques sont des poissons d'eau douce qui chassent à l'électricité.

> Une série d'expériences de laboratoire révèle comment ces animaux se servent d'impulsions électriques pour détecter, paralyser ou tuer leurs proies.

> Ces expériences expliquent aussi pourquoi les décharges électriques que ces poissons infligent à un prédateur en bondissant hors de l'eau sont plus violentes encore que celles qu'elles produisent dans l'eau.

L'AUTEUR



KENNETH C. CATANIA
professeur de biologie
à l'université Vanderbilt,
à Nashville, dans le Tennessee,
aux États-Unis

Les superpouvoirs de l'anguille électrique

Les anguilles électriques produisent des tensions de plusieurs centaines de volts. Comment s'en servent-elles pour se défendre ou pour chasser leurs proies ? Des expériences de laboratoire révèlent les étonnantes adaptations de ces gymnotes.

En Amazonie, certains poissons d'eau douce, les « anguilles électriques », infligent des décharges électriques à d'autres animaux pour les paralyser ou se défendre. Quand j'ai voulu parler de ces poissons à mes étudiants, je me suis rendu compte que nous en savions peu sur leur comportement. J'ai alors acquis quelques anguilles électriques pour mon laboratoire, et ce que j'ai vu alors – des proies soudainement pétrifiées sous l'eau – m'a tellement stupéfait que je me suis précipité dans leur étude ; au point de finir par tendre mon bras à l'une d'entre elles...

Les anguilles électriques semblent dotées d'une sorte de superpouvoir : elles paralysent



Les anguilles électriques émettent des impulsions électriques tant pour repérer des proies, les paralyser et les tuer, que pour se défendre.

© David Litschwaeger



leurs proies à distance. Du reste, mon premier réflexe fut de les comparer au Taser, ce pistolet électrique utilisé par les policiers pour immobiliser une personne à distance. Cet appareil crée en effet une incapacité neuromusculaire temporaire en interférant avec le contrôle des muscles par le système nerveux.

Le Taser envoie, à travers des fils, 19 impulsions électriques de forte tension par seconde. Les anguilles électriques n'ont nul besoin de fils, puisque l'eau est conductrice. À ce détail près, leurs impulsions électriques, d'une durée d'environ deux millisecondes chaque, rappellent tout à fait celles d'un Taser. Toutefois, pendant une attaque, elles peuvent en émettre plus de 400 par seconde, donc beaucoup plus qu'un Taser. Les anguilles électriques sont-elles juste des Tasers vivants à l'efficacité augmentée?

C'est avec cette question à l'esprit que j'ai entrepris d'élucider l'attaque de l'anguille et les effets de ses décharges électriques. À chaque étape de mon parcours, j'ai été surpris par son utilisation complexe de l'électricité.

D'IMPRESSONNANTES DÉCHARGES ÉLECTRIQUES

Les anguilles électriques (qui n'ont pas de rapport de parenté avec l'anguille d'Europe) sont des poissons d'eau douce des eaux amazoniennes. On en reconnaît depuis 2019 trois espèces proches alors qu'auparavant, une seule, *Electrophorus electricus*, était identifiée. Elles appartiennent à la famille des gymnotidés, dont les 41 espèces ont toutes des organes électriques qui leur servent à percevoir l'environnement et à communiquer, par l'intermédiaire de décharges

> électriques de basse tension. Chez le genre *Electrophorus*, c'est-à-dire les anguilles électriques, ces organes électriques sont devenus capables d'émettre des décharges pouvant dépasser 850 volts de tension, ce qui en fait de véritables armes. Une anguille électrique peut peser plus de 18 kilogrammes et mesurer 2,5 mètres de long. Réparti tout au long du corps, son organe électrique est constitué de milliers d'électrocytes, des cellules particulières en forme de disque qui fonctionnent comme des batteries, chacune d'elles pouvant créer une tension de 0,15 volt.

Pour vérifier que la comparaison avec le Taser était pertinente, je devais observer une anguille chasser. J'ai placé dans son bassin un poisson mort, mais aux nerfs et muscles toujours fonctionnels, et lui ai relié un fil afin de mesurer ses contractions musculaires; ce poisson était protégé de l'anguille par une barrière conductrice. Puis j'ai ajouté des vers de terre dans le bassin, que le gymnote dévorait après les avoir attaqués par décharges électriques.

Les séries de décharges de forte tension de l'anguille provoquaient des contractions musculaires massives dans le poisson quelque trois millisecondes après chaque attaque électrique, un temps que j'avais déjà mesuré en visionnant les vidéos d'attaque au ralenti. Les anguilles électriques sont donc l'équivalent d'un Taser aquatique. Les expériences ont aussi révélé qu'elles n'activent pas directement les muscles des poissons, mais seulement les nerfs qui y mènent. Chaque décharge de forte tension d'une anguille engendre, dans les nerfs moteurs du poisson, ce que l'on nomme un potentiel d'action, c'est-à-dire une impulsion nerveuse.

Cette observation est remarquable si l'on considère que l'organe électrique de l'anguille est un muscle modifié, activé par les propres nerfs moteurs – eux-mêmes activés par le cerveau – de l'animal. Ainsi, pour chaque décharge de forte tension, un signal de commande naît dans le cerveau de l'anguille, court le long de ses motoneurones – ces neurones dédiés à la transmission des signaux du cortex moteur –, active l'organe électrique, qui l'amplifie; puis, en passant à travers l'eau, le signal amplifié parvient aux motoneurones des poissons présents à proximité, dont les muscles se figent. Autrement dit, l'anguille dispose d'une sorte de télécommande mentale qui lui permet de paralyser ses proies à distance!

DOUBLETS ÉLECTRIQUES

Cette conclusion suggère que le fonctionnement des muscles des proies de l'anguille a régi en partie l'évolution de son organe électrique. Cette idée en tête, j'ai étudié de plus près les séries de décharges de forte tension. Les écrits d'un chercheur m'ayant précédé m'avaient en effet intrigué: Richard Bauer avait

été établi en 1979 que les anguilles électriques émettent pendant la chasse des paires d'impulsions électriques séparées de deux millisecondes. J'ai pu observer chacune de mes anguilles de laboratoire émettre de tels «doublets électriques». À quoi servent-ils?

Une petite recherche sur la physiologie musculaire m'a révélé que les doublets électriques, ou les paires de potentiels d'action qu'ils créent, provoquent une tension musculaire maximale. Mes observations montraient que les doublets émis par les anguilles entraînent un tremblement soudain du corps de la proie, alors que les séries de décharges paralysent celle-ci de façon continue. Les tremblements convulsifs font vibrer l'eau, ce que l'anguille perçoit. Cela suggérait que l'émission



Le gymnote constitue un dipôle électrique, sa tête étant le pôle positif



de doublets par le gymnote est un moyen d'obliger les animaux aquatiques à se trahir. Après tout, les anguilles électriques sauvages chassent la nuit dans les eaux amazoniennes, où elles sont entourées d'une très grande diversité de proies dissimulées, des proies beaucoup plus difficiles à repérer que les vers et poissons rouges que je mettais dans le bassin de mes anguilles.

UNE REDOUTABLE CHASSEUSE

Un fait soutient cette idée: quand les anguilles de mon laboratoire avaient affaire à de nouveaux types de proies, telles des écrevisses, ou à des animaux dissimulés sous les plantes du bassin, elles émettaient souvent des doublets électriques, puis attaquaient après le tremblement de la proie, comme si elles avaient été averties.

Ces observations étaient déjà très éloquentes, mais j'ai voulu avoir une preuve directe. J'ai attaché le poisson mort à un stimulateur électrique déclenchable soit par moi, soit par un doublet électrique de l'anguille, puis l'ai placé dans un sac plastique refermable choisi pour le protéger des doublets du gymnote. Ce dispositif m'a permis de contrôler le moment où les muscles du poisson se contractaient. Or