

3

LA CONJECTURE DES SOMMES DE TROIS CUBES

Début septembre 2019, 42 était l'entier positif le plus petit et le seul inférieur à 100 pour lequel on ignorait s'il était somme de trois cubes d'entiers.

Andrew Booker, de l'université de Bristol, en Angleterre, et Andrew Sutherland, du MIT, aux États-Unis, ont utilisé le système de calcul Charity Engine pour mener un énorme calcul d'exploration équivalent à plus de 1 million d'heures de calcul d'un ordinateur de bureau courant.

Une solution a été trouvée :

$$42 = (-80\,538\,738\,812\,075\,974)^3 + 80\,435\,758\,145\,817\,515^3 + 12\,602\,123\,297\,335\,631^3.$$

Le système de calcul Charity Engine coordonne plus de 500 000 machines personnelles de volontaires. Il les fait fonctionner pendant les moments où elles sont inutilisées, ce qui permet de réaliser d'énormes calculs à moindre coût. Charity Engine est fondé sur un programme de l'université de Berkeley et géré par la société Worldwide Computer Company.

La puissance informatique domestique résiduelle des ordinateurs du projet est vendue aux universités et aux entreprises. Les bénéfices sont versés à des associations caritatives ou servent à organiser des tirages au sort

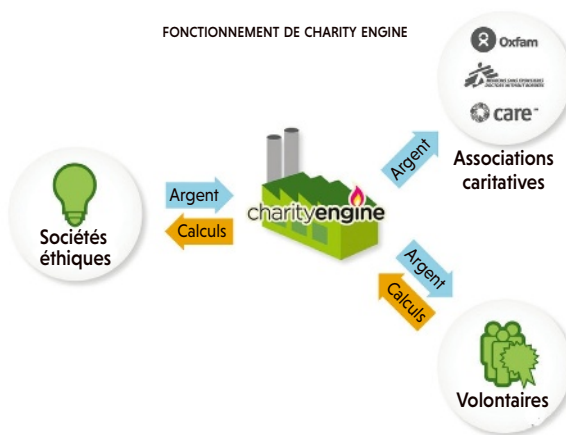
périodiques pour récompenser les participants au réseau. La puissance de calcul non achetée est attribuée à des projets informatiques divers.

La même méthode a aussi conduit à découvrir une expression inattendue de 3 comme somme de trois cubes :

$$3 = (-472\,715\,493\,453\,327\,032)^3 + (-569\,936\,821\,113\,563\,493\,509)^3 + 569\,936\,821\,221\,962\,380\,720^3.$$

Les seuls entiers inférieurs à 1 000 dont on ignore maintenant s'ils sont somme de trois cubes sont 114, 390, 579, 627, 633, 732, 921 et 975.

FONCTIONNEMENT DE CHARITY ENGINE



question « combien font 6 fois 9 ? ». Bien sûr, c'est absurde, puisque $6 \times 9 = 54$... mais justement, en base 13, le nombre s'écrivant 42 vaut $4 \times 13 + 2 = 54$.

À côté des occurrences introduites volontairement par les informaticiens pour s'amuser, et les rencontres inévitables avec le nombre 42 quand on cherche un peu partout dans l'histoire ou dans le monde, on peut quand même se demander si 42 est un nombre particulier du strict point de vue des mathématiques.

MATHÉMATIQUEMENT SINGULIER ?

Voici une liste de quelques propriétés mathématiques de 42.

- 42 est la somme des trois premières puissances de 2 d'exposant impair ($2^1 + 2^3 + 2^5 = 42$). La suite $a(n)$ des sommes de puissances impaires de 2 est la suite A020988 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org>). En base 2, son n -ième élément s'écrit 1010...10, avec « 10 » répété n fois, et sa formule est $a(n) = (2/3)(4^n - 1)$. Quand n augmente, la fréquence de ces nombres tend vers zéro, ce qui signifie que les nombres qui appartiennent à cette liste, donc 42 lui-même, sont exceptionnellement rares.

- 42 est la somme des deux premières puissances de 6 d'exposant non nul ($6^1 + 6^2 = 42$). La suite $b(n)$ des sommes de puissances de 6 est la suite A105281 de l'encyclopédie de Sloane. Elle est définie par les formules $b(0) = 0$, $b(n) = 6b(n-1) + 6$. La fréquence de ces nombres tend aussi vers 0 à l'infini.

- 42 est un nombre de Catalan. Les nombres de Catalan (voir l'encadré 1) ont été mentionnés, sous un autre nom, pour la première fois par Leonhard Euler, qui voulait connaître le nombre de façons différentes de découper en plusieurs triangles un polygone convexe à n côtés en joignant des sommets par des segments de droite. Le début de la suite (A000108 chez Neil Sloane) est 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ... La formule $c(n) = (2n)! / (n!(n+1)!)$ donne le n -ième terme de cette suite de nombres dont la densité, comme celles des deux précédentes, est nulle à l'infini.

Les nombres de la suite $c(n)$ sont nommés en l'honneur du mathématicien franco-belge Eugène Charles Catalan (1814-1894), qui découvrit que $c(n)$ est le nombre de façons de disposer n paires de parenthèses en respectant les règles habituelles d'écriture des parenthèses : jamais une parenthèse n'est fermée avant d'avoir été ouverte, et on ne peut fermer une parenthèse que lorsque toutes celles ouvertes depuis qu'elle a été ouverte sont elles-mêmes fermées.

Par exemple, $c(3) = 5$ car les dispositions possibles de 3 paires de parenthèses sont : ((())); ()()(); (())(); ()()(); ()()().

Le nombre $c(n)$ est également le nombre d'arbres binaires portant $n+1$ feuilles. C'est aussi le nombre de trajets montants sur un quadrillage situés sous la première diagonale (voir l'encadré 1, b). Cette propriété permet de comprendre la définition par récurrence des termes de la suite de Catalan, $c(0) = 1$ et $c(n+1) = \sum c(k)c(n-k)$, la somme portant sur les k allant de 0 à n . En effet, pour dénombrer le nombre de chemins >

> allant jusqu'à l'abscisse $n+1$, on considère un point intermédiaire, le plus bas possible, qui touche la diagonale; ceux avant (strictement en dessous de la diagonale) donnent $c(n-k)$, ceux après (en dessous au sens large de la diagonale) donnent $c(k)$.

– 42 est un nombre «pratique», ce qui veut dire que tout entier compris entre 1 et lui-même est somme de certains de ses diviseurs (distincts). Les premiers nombres pratiques sont 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72 (suite A005153 de Neil Sloane). On ne connaît aucune formule simple donnant le n -ième terme de cette suite, et la fréquence limite de ses termes semble cette fois positive.

Tout cela est amusant, mais il est faux de dire que 42 est vraiment exceptionnel sur le plan mathématique. Les nombres 41 ou 43, par exemple, appartiennent eux aussi à de nombreuses séries. Pour explorer ces questions, utilisez le lien [https://fr.wikipedia.org/wiki/42_\(nombre\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/42_(nombre)) en y remplaçant 42 par le nombre qui vous intéresse.

Le problème de savoir quels nombres sont plus particulièrement intéressants ou plus particulièrement inintéressants a été étudié par Nicolas Gauvrit, Hector Zénil et moi-même en

partant des suites répertoriées par Neil Sloane dans son encyclopédie. Outre un lien théorique avec la complexité de Kolmogorov (les nombres intéressants sont ceux disposant au moins d'une description brève), il a été montré un effet culturel spécifique pour les nombres retenus par l'encyclopédie de Neil Sloane, qui est donc autre chose qu'une encyclopédie fondée sur une pure objectivité mathématique (voir la bibliographie).

DU NOMBRE 42 AU PROBLÈME DES SOMMES DE TROIS CUBES !

Les informaticiens et mathématiciens savent l'attrait du nombre 42 et ont toujours pensé que c'était un simple jeu que l'on aurait pu tout aussi bien mener avec un autre nombre. Reste tout de même un élément récent d'actualité qui les a beaucoup amusés. Le nombre 42 a réellement donné beaucoup plus de fil à retordre que tous les autres nombres inférieurs à 100 dans le problème des 3 cubes.

Le problème des 3 cubes s'énonce ainsi : *Quels sont les nombres entiers n que l'on peut écrire sous la forme d'une somme de trois cubes de nombres entiers, $n=a^3+b^3+c^3$? Et, quand c'est le cas, comment trouver a , b et c ?*

La difficulté, même sur un plan pratique pour mener des calculs, provient de ce que, pour un n donné, l'espace des triplets à explorer fait intervenir des nombres entiers négatifs. Cet espace est donc infini, ce qui n'est pas le cas quand on s'intéresse aux sommes de carrés : dans une telle somme de carrés donnant n , chaque carré a une valeur absolue inférieure à $\sqrt{n}$. D'ailleurs, pour les sommes de carrés, on sait parfaitement ce qui est possible et impossible (voir l'encadré 4).

Dans le cas des cubes, on trouve des solutions inattendues très grandes, comme celle pour 156, découverte en 2007 :

$$156 = 26577110807569^3 + (-18161093358005)^3 + (-23381515025762)^3.$$

La première chose à noter pour qui s'intéresse aux sommes de trois cubes est que, pour certaines valeurs de l'entier n , l'équation $n=a^3+b^3+c^3$ n'a pas de solution. C'est le cas pour tous les entiers n de la forme $9m+4$ et $9m+5$ (par exemple 4, 5, 13, 14, 22, 23). La démonstration de cette affirmation est assez simple. On utilise le calcul «modulo 9», qui revient à supposer que $9=0$ et à ne manipuler que des nombres entre 0 et 8 ou entre -4 et $+4$.

On constate d'abord que : $0^3=0 \pmod{9}$; $1^3=1 \pmod{9}$; $2^3=8=-1 \pmod{9}$; $3^3=27=0 \pmod{9}$; $4^3=64=1 \pmod{9}$; $5^3=(-4)^3=-64=-1 \pmod{9}$; $6^3=(-3)^3=0 \pmod{9}$; $7^3=(-2)^3=1 \pmod{9}$; $8^3=(-1)^3=-1 \pmod{9}$.

Autrement dit : modulo 9, le cube d'un nombre entier vaut soit -1 ($=8$), soit 0, soit 1. Or l'addition de trois nombres choisis parmi 0, 1 et -1 donne :

LES SOMMES DE CARRÉS

4

On sait seulement depuis septembre 2019 que le nombre 42 est la somme de trois cubes. Les sommes de cubes sont difficiles à maîtriser à cause des entiers négatifs. En revanche, les sommes de carrés de nombres entiers, qui intéressent les mathématiciens depuis l'Antiquité, sont maintenant parfaitement connues. Voici rappelés les résultats à leur sujet.

Sommes de deux carrés

– Un nombre premier impair est somme de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est de la forme $4k+1$. La décomposition en somme de deux carrés est alors unique. Exemples : $5=1^2+2^2$, $13=2^2+3^2$, $17=1^2+4^2$.

– Un entier n est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k+3$ intervient avec un exposant pair dans la décomposition en facteurs premiers de n .

Exemple : $45=3^2 \cdot 5=6^2+3^2$. La décomposition de 45 en facteurs premiers fait intervenir 3, qui est de la forme $4k+3$, avec un exposant pair. Le nombre 45 satisfait donc la condition du théorème et s'écrit effectivement comme somme de deux carrés (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_deux_carrés_de_Fermat).

Sommes de trois carrés

– Tous les nombres entiers sauf ceux de la forme $3n$ et $8n+7$ sont des sommes de trois carrés (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_trois_carrés).

Sommes de quatre carrés

Tout nombre entier est somme de quatre carrés. Ce magnifique théorème fut démontré en 1770 par Lagrange et redémontré en 1772 par Euler (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_quatre_carrés_de_Lagrange).



Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), gravure d'Antonio Dalcò.