

> allant jusqu'à l'abscisse $n+1$, on considère un point intermédiaire, le plus bas possible, qui touche la diagonale; ceux avant (strictement en dessous de la diagonale) donnent $c(n-k)$, ceux après (en dessous au sens large de la diagonale) donnent $c(k)$.

– 42 est un nombre « pratique », ce qui veut dire que tout entier compris entre 1 et lui-même est somme de certains de ses diviseurs (distincts). Les premiers nombres pratiques sont 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72 (suite A005153 de Neil Sloane). On ne connaît aucune formule simple donnant le n -ième terme de cette suite, et la fréquence limite de ses termes semble cette fois positive.

Tout cela est amusant, mais il est faux de dire que 42 est vraiment exceptionnel sur le plan mathématique. Les nombres 41 ou 43, par exemple, appartiennent eux aussi à de nombreuses séries. Pour explorer ces questions, utilisez le lien [https://fr.wikipedia.org/wiki/42_\(nombre\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/42_(nombre)) en y remplaçant 42 par le nombre qui vous intéresse.

Le problème de savoir quels nombres sont plus particulièrement intéressants ou plus particulièrement inintéressants a été étudié par Nicolas Gauvrit, Hector Zénil et moi-même en

partant des suites répertoriées par Neil Sloane dans son encyclopédie. Outre un lien théorique avec la complexité de Kolmogorov (les nombres intéressants sont ceux disposant au moins d'une description brève), il a été montré un effet culturel spécifique pour les nombres retenus par l'encyclopédie de Neil Sloane, qui est donc autre chose qu'une encyclopédie fondée sur une pure objectivité mathématique (voir la bibliographie).

DU NOMBRE 42 AU PROBLÈME DES SOMMES DE TROIS CUBES !

Les informaticiens et mathématiciens savent l'attrait du nombre 42 et ont toujours pensé que c'était un simple jeu que l'on aurait pu tout aussi bien mener avec un autre nombre. Reste tout de même un élément récent d'actualité qui les a beaucoup amusés. Le nombre 42 a réellement donné beaucoup plus de fil à retordre que tous les autres nombres inférieurs à 100 dans le problème des 3 cubes.

Le problème des 3 cubes s'énonce ainsi : *Quels sont les nombres entiers n que l'on peut écrire sous la forme d'une somme de trois cubes de nombres entiers, $n=a^3+b^3+c^3$? Et, quand c'est le cas, comment trouver a , b et c ?*

La difficulté, même sur un plan pratique pour mener des calculs, provient de ce que, pour un n donné, l'espace des triplets à explorer fait intervenir des nombres entiers négatifs. Cet espace est donc infini, ce qui n'est pas le cas quand on s'intéresse aux sommes de carrés : dans une telle somme de carrés donnant n , chaque carré a une valeur absolue inférieure à $\sqrt{n}$. D'ailleurs, pour les sommes de carrés, on sait parfaitement ce qui est possible et impossible (voir l'encadré 4).

Dans le cas des cubes, on trouve des solutions inattendues très grandes, comme celle pour 156, découverte en 2007 :

$$156 = 26577110807569^3 + (-18161093358005)^3 + (-23381515025762)^3.$$

La première chose à noter pour qui s'intéresse aux sommes de trois cubes est que, pour certaines valeurs de l'entier n , l'équation $n=a^3+b^3+c^3$ n'a pas de solution. C'est le cas pour tous les entiers n de la forme $9m+4$ et $9m+5$ (par exemple 4, 5, 13, 14, 22, 23). La démonstration de cette affirmation est assez simple. On utilise le calcul « modulo 9 », qui revient à supposer que $9=0$ et à ne manipuler que des nombres entre 0 et 8 ou entre -4 et $+4$.

On constate d'abord que : $0^3=0 \pmod{9}$; $1^3=1 \pmod{9}$; $2^3=8=-1 \pmod{9}$; $3^3=27=0 \pmod{9}$; $4^3=64=1 \pmod{9}$; $5^3=(-4)^3=-64=-1 \pmod{9}$; $6^3=(-3)^3=0 \pmod{9}$; $7^3=(-2)^3=1 \pmod{9}$; $8^3=(-1)^3=-1 \pmod{9}$.

Autrement dit : modulo 9, le cube d'un nombre entier vaut soit -1 ($=8$), soit 0 , soit 1 . Or l'addition de trois nombres choisis parmi 0, 1 et -1 donne :

LES SOMMES DE CARRÉS

4 On sait seulement depuis septembre 2019 que le nombre 42 est la somme de trois cubes. Les sommes de cubes sont difficiles à maîtriser à cause des entiers négatifs. En revanche, les sommes de carrés de nombres entiers, qui intéressent les mathématiciens depuis l'Antiquité, sont maintenant parfaitement connues. Voici rappelés les résultats à leur sujet.

Sommes de deux carrés

– Un nombre premier impair est somme de deux carrés de nombres entiers si et seulement s'il est de la forme $4k+1$. La décomposition en somme de deux carrés est alors unique. Exemples : $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$.

– Un entier n est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k+3$ intervient avec un exposant pair dans la décomposition en facteurs premiers de n .

Exemple : $45 = 3^2 \cdot 5 = 6^2 + 3^2$. La décomposition de 45 en facteurs premiers fait intervenir 3, qui est de la forme $4k+3$, avec un exposant pair. Le nombre 45 satisfait donc la condition du théorème et s'écrit effectivement comme somme de deux carrés (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_deux_carrés_de_Fermat).

Sommes de trois carrés

– Tous les nombres entiers sauf ceux de la forme $3n$ et $8n+7$ sont des sommes de trois carrés (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_trois_carrés).

Sommes de quatre carrés

Tout nombre entier est somme de quatre carrés. Ce magnifique théorème fut démontré en 1770 par Lagrange et redémontré en 1772 par Euler (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_quatre_carrés_de_Lagrange).



Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), gravure d'Antonio Dalcò.

$0=0+0+0=0+1+(-1)$; $1=1+0+0=1+1+(-1)$;
 $2=1+1+0$; $3=1+1+1$; $6=-3=(-1)+(-1)+(-1)$;
 $7=-2=(-1)+(-1)+0$; $8=-1=(-1)+0+0=$
 $1+(-1)+(-1)$.

On n'obtient jamais 4 ou 5 ($=-4$). Cela signifie que les sommes de trois cubes ne sont jamais des nombres de la forme $9m+4$ ou $9m+5$. Nous dirons que $n=9m+4$ et $n=9m+5$ sont des valeurs interdites.

LA RECHERCHE DES SOLUTIONS, EN PRATIQUE

Pour illustrer à quel point la recherche des solutions de l'équation $n=a^3+b^3+c^3$ est délicate, indiquons ce qui se passe pour $n=1$ et $n=2$.

Pour $n=1$, il y a la solution évidente $1^3+1^3+(-1)^3=1$.

En existe-t-il d'autres? Oui:

$$9^3+(-6)^3+(-8)^3=729+(-216)+(-512)=1.$$

Ce n'est pas la seule, car, en 1936, le mathématicien allemand Kurt Mahler a proposé une infinité de solutions. Pour tout entier p :

$$(9p^4)^3+(3p-9p^4)^3+(1-9p^3)^3=1.$$

On prouve le résultat en utilisant l'identité remarquable: $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

Un ensemble infini de solutions est aussi connu pour $n=2$; il a été découvert en 1908 par un certain A. S. Werebrusov. Pour tout entier p :

$$(6p^3+1)^3+(1-6p^3)^3+(-6p^2)^3=2.$$

En multipliant chaque terme de ces égalités par le cube d'un entier, r^3 , on en déduit qu'il existe aussi une infinité de solutions pour tout cube d'un entier et tout double du cube d'un entier.

Pour 16 par exemple, qui est le double du cube de 2, on a: $14^3+(-10)^3+(-12)^3=16$

Indiquons encore que pour $n=3$, on ne connaissait en août 2019 que deux solutions:

$$1^3+1^3+1^3=3 \text{ et } 4^3+4^3+(-5)^3=3.$$

Vient alors naturellement à l'esprit la question: existe-t-il des solutions pour toutes les valeurs non interdites de n ?

LES ORDINATEURS AU TRAVAIL

Pour répondre, on a commencé par prendre la suite des valeurs non interdites 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, ... (A060464 de Neil Sloane) en les étudiant une par une. Si aucune de celles étudiées ne se révèle impossible, on aura des raisons de conjecturer que pour tout entier n qui n'est pas de la forme $n=9m+4$ ou $n=9m+5$, il existe des solutions à l'équation $n=a^3+b^3+c^3$.

Les recherches menées, en fonction de la puissance des ordinateurs ou réseaux d'ordinateurs utilisés, ont donné une série de résultats de plus en plus nombreux. Ce sont eux qui vont à nouveau nous mener au fameux et intrigant nombre 42.

En 2009, Andrea-Stephan Elsenhans et Jörg Jahnke, utilisant une méthode proposée par Noam Elkies en 2000, ont exploré tous les triplets a , b , c d'entiers de valeur absolue

inférieure à 10^{14} pour rechercher les solutions pour n compris entre 1 et 1000. Leur article concluait que la question de l'existence d'une solution pour les nombres inférieurs à 1000 restait ouverte uniquement pour 33, 42, 74, 114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 795, 906, 921, et 975.

Pour les entiers inférieurs à 100, seules trois énigmes subsistaient donc: 33, 42 et 74.

En 2016, Sander Huismen poussa un peu plus loin l'exploration et trouva une solution pour 74: $(-284650292555885)^3+(66229832190556)^3+(283450105697727)^3$.

Restaient alors seulement 33 et 42 pour les n inférieurs à 100. En mars 2019, Andrew Booker régla le cas de 33: $(8866128975287528)^3+(-8778405442862239)^3+(-2736111468807040)^3$. Dès lors, le nombre de Douglas Adams était le dernier entier positif et inférieur à 100 pour lequel on ignorait s'il pouvait s'écrire comme une somme de trois cubes d'entiers.

Si la réponse avait été négative, on aurait eu une raison mathématique vraiment sérieuse de donner de l'importance à 42; il aurait été le premier nombre possiblement somme de trois cubes qui ne l'aurait pas été. Les ordinateurs ont peiné, mais ils ont déçu ce bref espoir (voir l'encadré 3).

La réponse est venue en septembre 2019. Ce fut le résultat d'un calcul faramineux coordonné par Andrew Booker et Andrew Sutherland. Des ordinateurs participant au réseau Charity Engine d'ordinateurs personnels calculant pendant l'équivalent de plus de 1 million d'heures découvrirent que:

$$42=(-80538738812075974)^3+80435758145817515^3+12602123297335631^3$$

Les cas des entiers 165, 795 et 906 ont été aussi résolus récemment. Il ne reste donc que les cas de 114, 390, 579, 627, 633, 732, 921 et 975 à régler pour les entiers inférieurs à 1000.

La conjecture qu'il existe des solutions pour tous les n qui ne sont pas de la forme $9m+4$ ou $9m+5$ semble donc se confirmer. En 1992, Roger Heath-Brown a proposé une conjecture plus forte affirmant que pour tous les n envisageables, il existe une infinité de façons de les écrire comme somme de trois cubes. Le travail est donc loin d'être terminé.

La difficulté du problème apparaît énorme, ce qui fait envisager que le problème « n est-il une somme de trois cubes?» pourrait être indécidable. Autrement dit, il se pourrait qu'aucun algorithme, aussi astucieux soit-il, ne soit capable de traiter tous les cas possibles. C'est le cas pour l'arrêt des programmes, Alan Turing ayant montré en 1936 qu'aucun algorithme ne peut les traiter tous. Mais ici, nous sommes dans un domaine purement numérique très simple à énoncer, et donc si l'on arrivait à prouver une telle indécidabilité, ce serait une nouveauté.

Le nombre 42 était difficile, mais ce n'était qu'une étape! ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Starr, **Mathematicians solve '42' problem with planetary supercomputer**, *Science Alert*, 9 sept. 2019 (<https://bit.ly/2EsKZRS>).

R. F. Mandelbaum, **Mathematicians no longer stumped by the number 3**, *Gizmodo*, 19 sept. 2019 (<https://bit.ly/2SbqgdJ>).

A. Booker, **Cracking the problem with 33**, *Res. Number Theory*, 18 mai 2019 (<https://arxiv.org/pdf/1903.04284.pdf>).

N. Gauvrit et al., **Sloane's gap. Mathematical and social factors explain the distribution of numbers in the OEIS**, *Journal of Humanistic Mathematics*, vol 3(1), pp. 3-19, 2013 (<https://arxiv.org/pdf/1101.4470>).

N. Gauvrit et al., **Le fossé de Sloane, Mathématiques et sciences humaines**, *Mathematics and social sciences*, vol. 194, pp. 5-17, 2011 (<https://journals.openedition.org/msh/pdf/12014>).

A.-S. Elsenhans et J. Jahnke, **New sums of three cubes**, *Mathematics of Computation*, vol. 78(266), pp. 1227-1230, 2009.

D. Adams, **The Hitchhiker's Guide to the Galaxy**, Pan Books, 1979 ; **Le Guide du routard galactique**, Denoël, 1982.