

$0=0+0+0=0+1+(-1)$; $1=1+0+0=1+1+(-1)$;
 $2=1+1+0$; $3=1+1+1$; $6=-3=(-1)+(-1)+(-1)$;
 $7=-2=(-1)+(-1)+0$; $8=-1=(-1)+0+0=$
 $1+(-1)+(-1)$.

On n'obtient jamais 4 ou 5 ($=-4$). Cela signifie que les sommes de trois cubes ne sont jamais des nombres de la forme $9m+4$ ou $9m+5$. Nous dirons que $n=9m+4$ et $n=9m+5$ sont des valeurs interdites.

LA RECHERCHE DES SOLUTIONS, EN PRATIQUE

Pour illustrer à quel point la recherche des solutions de l'équation $n=a^3+b^3+c^3$ est délicate, indiquons ce qui se passe pour $n=1$ et $n=2$.

Pour $n=1$, il y a la solution évidente $1^3+1^3+(-1)^3=1$.

En existe-t-il d'autres? Oui:

$$9^3+(-6)^3+(-8)^3=729+(-216)+(-512)=1.$$

Ce n'est pas la seule, car, en 1936, le mathématicien allemand Kurt Mahler a proposé une infinité de solutions. Pour tout entier p :

$$(9p^4)^3+(3p-9p^4)^3+(1-9p^3)^3=1.$$

On prouve le résultat en utilisant l'identité remarquable: $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

Un ensemble infini de solutions est aussi connu pour $n=2$; il a été découvert en 1908 par un certain A. S. Werebrusov. Pour tout entier p :

$$(6p^3+1)^3+(1-6p^3)^3+(-6p^2)^3=2.$$

En multipliant chaque terme de ces égalités par le cube d'un entier, r^3 , on en déduit qu'il existe aussi une infinité de solutions pour tout cube d'un entier et tout double du cube d'un entier.

Pour 16 par exemple, qui est le double du cube de 2, on a: $14^3+(-10)^3+(-12)^3=16$

Indiquons encore que pour $n=3$, on ne connaissait en août 2019 que deux solutions:

$$1^3+1^3+1^3=3 \text{ et } 4^3+4^3+(-5)^3=3.$$

Vient alors naturellement à l'esprit la question: existe-t-il des solutions pour toutes les valeurs non interdites de n ?

LES ORDINATEURS AU TRAVAIL

Pour répondre, on a commencé par prendre la suite des valeurs non interdites 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, ... (A060464 de Neil Sloane) en les étudiant une par une. Si aucune de celles étudiées ne se révèle impossible, on aura des raisons de conjecturer que pour tout entier n qui n'est pas de la forme $n=9m+4$ ou $n=9m+5$, il existe des solutions à l'équation $n=a^3+b^3+c^3$.

Les recherches menées, en fonction de la puissance des ordinateurs ou réseaux d'ordinateurs utilisés, ont donné une série de résultats de plus en plus nombreux. Ce sont eux qui vont à nouveau nous mener au fameux et intrigant nombre 42.

En 2009, Andrea-Stephan Elsenhans et Jörg Jähnel, utilisant une méthode proposée par Noam Elkies en 2000, ont exploré tous les triplets a, b, c d'entiers de valeur absolue

inférieure à 10^{14} pour rechercher les solutions pour n compris entre 1 et 1000. Leur article concluait que la question de l'existence d'une solution pour les nombres inférieurs à 1000 restait ouverte uniquement pour 33, 42, 74, 114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 795, 906, 921, et 975.

Pour les entiers inférieurs à 100, seules trois énigmes subsistaient donc: 33, 42 et 74.

En 2016, Sander Huismen poussa un peu plus loin l'exploration et trouva une solution pour 74: $(-284650292555885)^3+(66229832190556)^3+(283450105697727)^3$.

Restaient alors seulement 33 et 42 pour les n inférieurs à 100. En mars 2019, Andrew Booker régla le cas de 33: $(8866128975287528)^3+(-8778405442862239)^3+(-2736111468807040)^3$. Dès lors, le nombre de Douglas Adams était le dernier entier positif et inférieur à 100 pour lequel on ignorait s'il pouvait s'écrire comme une somme de trois cubes d'entiers.

Si la réponse avait été négative, on aurait eu une raison mathématique vraiment sérieuse de donner de l'importance à 42; il aurait été le premier nombre possiblement somme de trois cubes qui ne l'aurait pas été. Les ordinateurs ont peiné, mais ils ont déçu ce bref espoir (voir l'encadré 3).

La réponse est venue en septembre 2019. Ce fut le résultat d'un calcul faramineux coordonné par Andrew Booker et Andrew Sutherland. Des ordinateurs participant au réseau Charity Engine d'ordinateurs personnels calculant pendant l'équivalent de plus de 1 million d'heures découvrirent que:

$$42=(-80538738812075974)^3+80435758145817515^3+12602123297335631^3$$

Les cas des entiers 165, 795 et 906 ont été aussi résolus récemment. Il ne reste donc que les cas de 114, 390, 579, 627, 633, 732, 921 et 975 à régler pour les entiers inférieurs à 1000.

La conjecture qu'il existe des solutions pour tous les n qui ne sont pas de la forme $9m+4$ ou $9m+5$ semble donc se confirmer. En 1992, Roger Heath-Brown a proposé une conjecture plus forte affirmant que pour tous les n envisageables, il existe une infinité de façons de les écrire comme somme de trois cubes. Le travail est donc loin d'être terminé.

La difficulté du problème apparaît énorme, ce qui fait envisager que le problème « n est-il une somme de trois cubes?» pourrait être indécidable. Autrement dit, il se pourrait qu'aucun algorithme, aussi astucieux soit-il, ne soit capable de traiter tous les cas possibles. C'est le cas pour l'arrêt des programmes, Alan Turing ayant montré en 1936 qu'aucun algorithme ne peut les traiter tous. Mais ici, nous sommes dans un domaine purement numérique très simple à énoncer, et donc si l'on arrivait à prouver une telle indécidabilité, ce serait une nouveauté.

Le nombre 42 était difficile, mais ce n'était qu'une étape! ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Starr, **Mathematicians solve '42' problem with planetary supercomputer**, *Science Alert*, 9 sept. 2019 (<https://bit.ly/2EsKZRS>).

R. F. Mandelbaum, **Mathematicians no longer stumped by the number 3**, *Gizmodo*, 19 sept. 2019 (<https://bit.ly/2SbqgdJ>).

A. Booker, **Cracking the problem with 33**, *Res. Number Theory*, 18 mai 2019 (<https://arxiv.org/pdf/1903.04284.pdf>).

N. Gauvrit et al., **Sloane's gap. Mathematical and social factors explain the distribution of numbers in the OEIS**, *Journal of Humanistic Mathematics*, vol 3(1), pp. 3-19, 2013 (<https://arxiv.org/pdf/1101.4470>).

N. Gauvrit et al., **Le fossé de Sloane, Mathématiques et sciences humaines**, *Mathematics and social sciences*, vol. 194, pp. 5-17, 2011 (<https://journals.openedition.org/msh/pdf/12014>).

A.-S. Elsenhans et J. Jähnel, **New sums of three cubes**, *Mathematics of Computation*, vol. 78(266), pp. 1227-1230, 2009.

D. Adams, **The Hitchhiker's Guide to the Galaxy**, Pan Books, 1979 ; **Le Guide du routard galactique**, Denoël, 1982.