

$0=0+0+0=0+1+(-1)$; $1=1+0+0=1+1+(-1)$;
 $2=1+1+0$; $3=1+1+1$; $6=-3=(-1)+(-1)+(-1)$;
 $7=-2=(-1)+(-1)+0$; $8=-1=(-1)+0+0=$
 $1+(-1)+(-1)$.

On n'obtient jamais 4 ou 5 ($=-4$). Cela signifie que les sommes de trois cubes ne sont jamais des nombres de la forme $9m+4$ ou $9m+5$. Nous dirons que $n=9m+4$ et $n=9m+5$ sont des valeurs interdites.

LA RECHERCHE DES SOLUTIONS, EN PRATIQUE

Pour illustrer à quel point la recherche des solutions de l'équation $n=a^3+b^3+c^3$ est délicate, indiquons ce qui se passe pour $n=1$ et $n=2$.

Pour $n=1$, il y a la solution évidente $1^3+1^3+(-1)^3=1$.

En existe-t-il d'autres? Oui:

$$9^3+(-6)^3+(-8)^3=729+(-216)+(-512)=1.$$

Ce n'est pas la seule, car, en 1936, le mathématicien allemand Kurt Mahler a proposé une infinité de solutions. Pour tout entier p :

$$(9p^4)^3+(3p-9p^4)^3+(1-9p^3)^3=1.$$

On prouve le résultat en utilisant l'identité remarquable: $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

Un ensemble infini de solutions est aussi connu pour $n=2$; il a été découvert en 1908 par un certain A. S. Werebrusov. Pour tout entier p :

$$(6p^3+1)^3+(1-6p^3)^3+(-6p^2)^3=2.$$

En multipliant chaque terme de ces égalités par le cube d'un entier, r^3 , on en déduit qu'il existe aussi une infinité de solutions pour tout cube d'un entier et tout double du cube d'un entier.

Pour 16 par exemple, qui est le double du cube de 2, on a: $14^3+(-10)^3+(-12)^3=16$

Indiquons encore que pour $n=3$, on ne connaissait en août 2019 que deux solutions:

$$1^3+1^3+1^3=3 \text{ et } 4^3+4^3+(-5)^3=3.$$

Vient alors naturellement à l'esprit la question: existe-t-il des solutions pour toutes les valeurs non interdites de n ?

LES ORDINATEURS AU TRAVAIL

Pour répondre, on a commencé par prendre la suite des valeurs non interdites 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, ... (A060464 de Neil Sloane) en les étudiant une par une. Si aucune de celles étudiées ne se révèle impossible, on aura des raisons de conjecturer que pour tout entier n qui n'est pas de la forme $n=9m+4$ ou $n=9m+5$, il existe des solutions à l'équation $n=a^3+b^3+c^3$.

Les recherches menées, en fonction de la puissance des ordinateurs ou réseaux d'ordinateurs utilisés, ont donné une série de résultats de plus en plus nombreux. Ce sont eux qui vont à nouveau nous mener au fameux et intrigant nombre 42.

En 2009, Andrea-Stephan Elsenhans et Jörg Jähnel, utilisant une méthode proposée par Noam Elkies en 2000, ont exploré tous les triplets a , b , c d'entiers de valeur absolue

inférieure à 10^{14} pour rechercher les solutions pour n compris entre 1 et 1000. Leur article concluait que la question de l'existence d'une solution pour les nombres inférieurs à 1000 restait ouverte uniquement pour 33, 42, 74, 114, 165, 390, 579, 627, 633, 732, 795, 906, 921, et 975.

Pour les entiers inférieurs à 100, seules trois énigmes subsistaient donc: 33, 42 et 74.

En 2016, Sander Huismen poussa un peu plus loin l'exploration et trouva une solution pour 74: $(-284650292555885)^3+(66229832190556)^3+(283450105697727)^3$.

Restaient alors seulement 33 et 42 pour les n inférieurs à 100. En mars 2019, Andrew Booker régla le cas de 33: $(8866128975287528)^3+(-8778405442862239)^3+(-2736111468807040)^3$. Dès lors, le nombre de Douglas Adams était le dernier entier positif et inférieur à 100 pour lequel on ignorait s'il pouvait s'écrire comme une somme de trois cubes d'entiers.

Si la réponse avait été négative, on aurait eu une raison mathématique vraiment sérieuse de donner de l'importance à 42; il aurait été le premier nombre possiblement somme de trois cubes qui ne l'aurait pas été. Les ordinateurs ont peiné, mais ils ont déçu ce bref espoir (voir l'encadré 3).

La réponse est venue en septembre 2019. Ce fut le résultat d'un calcul faramineux coordonné par Andrew Booker et Andrew Sutherland. Des ordinateurs participant au réseau Charity Engine d'ordinateurs personnels calculant pendant l'équivalent de plus de 1 million d'heures découvrirent que:

$$42=(-80538738812075974)^3+80435758145817515^3+12602123297335631^3$$

Les cas des entiers 165, 795 et 906 ont été aussi résolus récemment. Il ne reste donc que les cas de 114, 390, 579, 627, 633, 732, 921 et 975 à régler pour les entiers inférieurs à 1000.

La conjecture qu'il existe des solutions pour tous les n qui ne sont pas de la forme $9m+4$ ou $9m+5$ semble donc se confirmer. En 1992, Roger Heath-Brown a proposé une conjecture plus forte affirmant que pour tous les n envisageables, il existe une infinité de façons de les écrire comme somme de trois cubes. Le travail est donc loin d'être terminé.

La difficulté du problème apparaît énorme, ce qui fait envisager que le problème « n est-il une somme de trois cubes?» pourrait être indécidable. Autrement dit, il se pourrait qu'aucun algorithme, aussi astucieux soit-il, ne soit capable de traiter tous les cas possibles. C'est le cas pour l'arrêt des programmes, Alan Turing ayant montré en 1936 qu'aucun algorithme ne peut les traiter tous. Mais ici, nous sommes dans un domaine purement numérique très simple à énoncer, et donc si l'on arrivait à prouver une telle indécidabilité, ce serait une nouveauté.

Le nombre 42 était difficile, mais ce n'était qu'une étape! ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Starr, **Mathematicians solve '42' problem with planetary supercomputer**, *Science Alert*, 9 sept. 2019 (<https://bit.ly/2EsKZRS>).

R. F. Mandelbaum, **Mathematicians no longer stumped by the number 3**, *Gizmodo*, 19 sept. 2019 (<https://bit.ly/2SbqgdJ>).

A. Booker, **Cracking the problem with 33**, *Res. Number Theory*, 18 mai 2019 (<https://arxiv.org/pdf/1903.04284.pdf>).

N. Gauvrit et al., **Sloane's gap. Mathematical and social factors explain the distribution of numbers in the OEIS**, *Journal of Humanistic Mathematics*, vol 3(1), pp. 3-19, 2013 (<https://arxiv.org/pdf/1101.4470>).

N. Gauvrit et al., **Le fossé de Sloane, Mathématiques et sciences humaines**, *Mathematics and social sciences*, vol. 194, pp. 5-17, 2011 (<https://journals.openedition.org/msh/pdf/12014>).

A.-S. Elsenhans et J. Jähnel, **New sums of three cubes**, *Mathematics of Computation*, vol. 78(266), pp. 1227-1230, 2009.

D. Adams, **The Hitchhiker's Guide to the Galaxy**, Pan Books, 1979 ; **Le Guide du routard galactique**, Denoël, 1982.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

CALANQUES ANNÉE ZÉRO

À l'occasion d'une commande publique, le photographe Nicolas Floc'h dresse le portrait détaillé des fonds marins du Parc national des Calanques: un état zéro indispensable pour mieux préserver le site.

Entre Marseille et Cassis, sur près de 20 kilomètres de côtes, s'étendent les Calanques, une succession d'anses et de criques creusées à l'aplomb d'un massif montagneux dans lequel se niche en particulier la grotte Cosquer, dont l'entrée est aujourd'hui au-dessous du niveau de la mer. Par bateau ou sur les nombreux chemins de randonnée, le site est parcouru chaque année par des millions de visiteurs, intense fréquentation qui fragilise l'écosystème tout entier. D'autres menaces pèsent plus encore sur la préservation du site, notamment les rejets en mer de boues rouges, les déchets (oxydes

de fer, soude caustique, métaux lourds...) de l'usine Alteo Gardanne, où de l'aluminium est extrait de la bauxite.

Pour faire face à ces dangers, les Calanques sont depuis 2012 protégées grâce à la création du Parc national des Calanques. L'établissement public est aidé en cela par la fondation Camargo, installée à Cassis, et par l'Observatoire des sciences de l'Univers (l'institut Pythéas). Ensemble, et avec le soutien du ministère de la Culture, ils viennent de passer une commande publique artistique auprès du photographe Nicolas Floc'h. Il s'agit pour lui de réaliser son projet *Invisible*, développé lors de la résidence artistique «Calanques, territoire de sciences, source d'inspiration», proposée par les trois structures partenaires.

L'objectif est de dresser grâce à des photographies un état zéro des fonds marins des Calanques en suivant l'ensemble du trait de côte, soit 162 kilomètres. Les images obtenues, grâce auxquelles les acteurs de la préservation des Calanques pourront suivre

L'anse de l'Arène,
à Cassis, par 4 mètres
de profondeur.

l'évolution du milieu, seront en noir et blanc, prises en lumière naturelle et au grand-angle. Pourquoi un tel parti pris? L'idée est d'échapper aux stéréotypes de la photographie sous-marine classique, qui privilégie trop souvent, selon Nicolas Floc'h, le spectaculaire et une représentation scénarisée et artificielle des fonds marins. Là, l'approche panoramique des paysages montre la mer telle qu'elle s'offre au regard et prend en compte la dimension verticale, celle de la colonne d'eau, le long de laquelle le point de vue varie.

Cette volonté de réalisme semble paradoxale tant les clichés déjà réalisés





(voir la photographie) semblent tendre vers l'abstraction. C'était déjà le cas d'une série précédente, *La Couleur de l'eau*, où ce qui s'apparente à des monochromes bleus, verts ou rouges... renvoie en fait à la composition concrète du milieu marin (sédiments, plancton, matières détritiques...) conférant à l'eau sa turbidité et sa couleur. Le paradoxe n'est donc qu'apparent. Cette turbidité est aux yeux de Nicolas Floc'h l'un des traits essentiels de son travail photographique: c'est elle qui marque l'horizon et les contours des paysages sous-marins. Le choix du noir et blanc permet justement au photographe de travailler

sur la densité créée par la turbidité et sur l'imaginaire, rendant au final les images plus simples d'accès, moins exotiques que lorsqu'elles sont saturées de couleurs. L'immersion en est facilitée.

Le projet *Invisible* s'inscrit dans un programme plus ambitieux mené par l'artiste: photographier les grandes typologies de paysages sous-marins français, à partir de l'exploration des différentes façades maritimes, et de les mettre en perspective face au changement climatique et aux pressions anthropiques.

La commande sera présentée au public lors de la biennale européenne itinérante Manifesta 13 et à l'occasion du

Congrès mondial de la Nature, qui tous deux se tiendront à Marseille en juin 2020. Par ailleurs, l'ensemble de l'œuvre de Nicolas Floc'h sera l'objet de l'exposition « Paysages productifs », au FRAC Provence-Alpes-Côte d'Azur du 6 juin au 13 septembre 2020. ■

Pour plus d'informations:
nicolasfloch.net
fracpaca.org



L'auteur a publié:
**Pollock, Turner, Van Gogh,
Vermeer et la science...**
(Belin, 2018)