

MATHÉMATIQUES

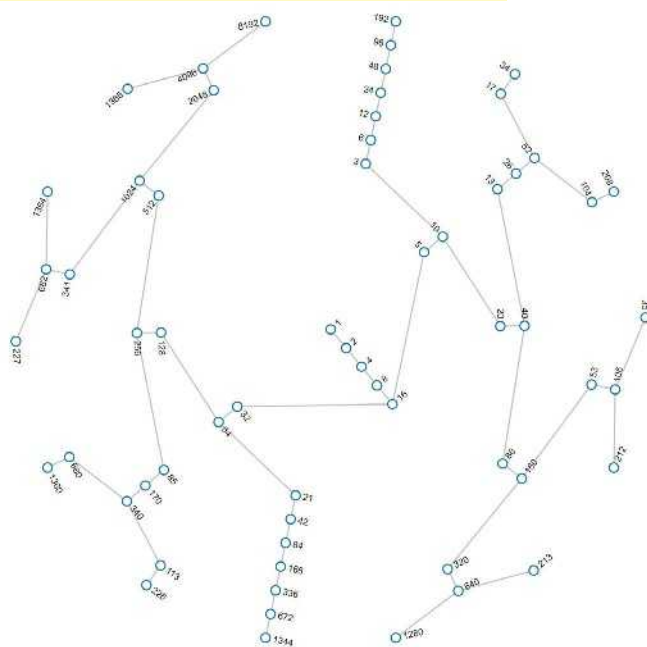
UNE PERCÉE DANS LA CONJECTURE DE COLLATZ

Ce problème mathématique à l'énoncé élémentaire défie les chercheurs depuis plus de quatre-vingts ans. Un résultat de Terence Tao ouvre une brèche.

En mathématiques, une conjecture s'énonce parfois très facilement tout en donnant du fil à retordre aux chercheurs. C'est le cas de la «conjecture de Collatz», ou «conjecture de Syracuse», qui a la réputation d'être le problème non résolu le plus simple de toutes les mathématiques. Proposée par l'Allemand Lothar Collatz en 1937, cette énigme part de la procédure suivante. Prenez un entier strictement positif; s'il est pair, divisez-le par 2; s'il est impair, multipliez-le par 3 et ajoutez 1. Répétez cette procédure – nommée «fonction de Collatz» – avec le nouvel entier obtenu, et ainsi de suite. La conjecture de Collatz affirme que vous finirez par tomber sur le nombre 1. Par exemple, si l'on part de 1, on obtient successivement les nombres: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1... et l'on reste bloqué dans cette boucle. En partant de 3, on trouve 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1... Aucune régularité n'émerge, mais on retombe toujours sur 1: c'est ce qu'affirme la conjecture. Terence Tao, de l'université de Californie à Los Angeles, vient de franchir un pas important en montrant que la conjecture est «presque vraie» pour «presque tous» les nombres.

Les mathématiciens ont numériquement vérifié la conjecture de Collatz pour tous les entiers jusqu'à environ 10^{20} , sans avoir réussi à fournir une preuve. Mais ils ont obtenu des résultats partiels: pour la plupart, ceux-ci donnent un résultat sur «presque tous» les entiers. Ce mot a un sens mathématique précis, qu'on définit souvent de la façon suivante. Pour un entier N et une propriété (P), on compte le nombre $N(P)$ d'entiers plus petits que N et vérifiant (P). On considère alors le rapport $N(P)/N$; si cette proportion tend vers 1 lorsqu'on fait croître N à l'infini, on dira que «presque tous» les entiers vérifient (P).

C'est ce type de résultat que vient d'obtenir Terence Tao, dans une version modifiée et forte. Considérons n'importe quelle fonction f associant à chaque entier un nombre réel, en supposant seulement qu'en prenant des entiers N tendant vers l'infini, les nombres $f(N)$ tendent aussi vers l'infini; autrement dit, f tend vers l'infini. Mais la fonction f peut cependant avoir une croissance très lente, comme la fonction logarithme, de sorte que $f(N)$ peut être



Ce graphe représente les nombres obtenus en itérant la fonction de Collatz à partir de certains entiers. Seuls les nombres qui mènent à 1 en 13 étapes ou moins sont représentés.

9 232

EN APPLIQUANT SUCCESSIVEMENT LA FONCTION DE COLLATZ À L'ENTIER 27, ON NE TOMBE SUR 1 QU'AU BOUT DE 111 ÉTAPES, EN PASSANT PAR DES ENTIERES DONT LE PLUS GRAND EST 9 232. IL EXISTE AINSI DES « SUITES DE COLLATZ » EXCEPTIONNELLEMENT LONGUES ET HAUTES PAR RAPPORT À L'ENTIER DE DÉPART.

beaucoup plus petit que N . Le théorème de Terence Tao stipule qu'en partant de «presque tout» entier N et en appliquant successivement la fonction de Collatz, on atteint au moins une fois une valeur inférieure à $f(N)$.

Pour prouver son théorème, Terence Tao a montré le résultat pour un ensemble d'entiers restreint, mais doté de certaines propriétés intéressantes qui le rendent «universel». Plus précisément, il a choisi ces entiers pour que leurs propriétés arithmétiques (ici, leurs restes dans les divisions par toutes les puissances de 3) soient adaptées au comportement de la fonction de Collatz.

Ce résultat ne suffit pas pour dire qu'on tombe toujours sur 1, mais cette avancée relance l'espoir d'une preuve – peut-être très différente de l'approche de Terence Tao – pour la version originale de la conjecture. ■

L. G.

T. Tao, prépublication du 8 septembre 2019, <https://arxiv.org/abs/1909.03562>

EN BREF

UN CHAMPIGNON HORS D'ÂGE

Les champignons se fossilisent moins bien que les plantes. D'ailleurs, le plus vieux fossile de champignon connu remontait à 460 millions d'années seulement. Mais Steeve Bonneville, de l'université libre de Bruxelles, et ses collègues ont découvert (et identifié chimiquement) des restes fossiles de mycélium – le réseau dense de filaments microscopiques développé sous terre par les champignons – dans des roches africaines âgées de 715 à 810 millions d'années.

Sc. Adv., 22 janvier 2020

DE L'HYDROGÈNE MÉTALLIQUE ?

D'un point de vue de la conduction électrique, l'hydrogène gazeux est un isolant. Sous fortes pressions et à basse température, il devient liquide puis solide. En 1935, des chercheurs ont suggéré qu'avec une pression extrême, l'hydrogène solide deviendrait même conducteur ou « métallique ». Dans la quête ardue pour le vérifier, Paul Loubeyre, du CEA, et ses collègues auraient récemment créé cet état de la matière grâce à une pression de plus de 4 millions d'atmosphères.

Nature, 29 janvier 2020

L'INTELLIGENCE DES SEICHES

Les éthologues savent que les céphalopodes sont intelligents, et pas seulement « Paul le poulpe »... Cela se confirme avec les seiches : Pauline Billard, de l'université de Caen-Normandie, et ses collègues ont montré qu'elles utilisent leur mémoire pour optimiser leur alimentation. Habituees à recevoir systématiquement des crevettes – leur aliment préféré – au dîner, elles mangent moins de crabe le jour. Mais lorsque l'apport en crevettes est aléatoire, elles font des réserves et mangent plus de crabe.

Biology Letters, 5 février 2020

ÉVOLUTION

MARCHER SUR LES NAGEOIRES



Reconstitution de *Tiktaalik roseae*, un poisson qui vivait il y a 375 millions d'années et qui avait déjà des traits propres aux tétrapodes.

Il y a plusieurs centaines de millions d'années, des poissons osseux se sont aventurés sur les continents. Mais comment ces animaux aquatiques supportaient-ils leur propre poids et se hissaient-ils sur la terre ferme ? Neil Shubin, de l'université de Chicago, et ses collègues ont examiné le rôle des rayons des nageoires dans ce moment crucial de l'histoire évolutive.

Les paléontologues ont analysé plusieurs espèces et notamment *Tiktaalik roseae*. Ce poisson vivait il y a 375 millions d'années et aurait été capable de faire de brèves excursions sur les plages de l'époque. Les chercheurs ont choisi de l'étudier car il présente une mosaïque de caractères propres à la fois aux poissons osseux et aux tétrapodes, ce qui en fait un représentant idéal de la transition entre les modes de vie de ces deux groupes.

En comparant des modèles 3D des nageoires pectorales (celles qui ont évolué

pour donner les pattes antérieures des tétrapodes) de différentes espèces, obtenus par tomodynamométrie, les chercheurs ont constaté qu'au cours de l'évolution, les rayons sont devenus plus solides et qu'une asymétrie s'est développée entre les rayons du côté ventral et ceux du côté dorsal, les seconds devenant plus nombreux et plus larges que les premiers.

Chez *Tiktaalik roseae*, l'asymétrie est très forte, ce qui a donné une partie charnue, comme une paume, que l'animal devait utiliser pour se maintenir sur les sols boueux des rivières. Cette asymétrie suggère aussi la présence de puissants muscles sous les nageoires qui auraient aidé à supporter le poids de l'animal lorsqu'il se hissait à l'air libre. ■

WILLIAM ROWE-PIRRA

T. A. Stewart et al., PNAS, vol. 117, n° 3, pp. 1612-1620, 2019, <https://www.pnas.org/content/117/3/1612>

ARCHÉOLOGIE

DES CARRIÈRES LIÉES À PIANTARELLA

Les « villas maritimes » sont de pompeuses résidences romaines de villégiature sur la mer. Une seule est connue en Corse : la villa de Piantarella, qui domine les bouches de Bonifacio. Mais s'agit-il vraiment d'un lieu de villégiature ? Une équipe de chercheurs de l'université libre de Bruxelles, de celle d'Aix-Marseille et de la DRASSM s'est emparée de la question, et propose que la villa soit plutôt le lieu de résidence d'un administrateur des carrières de granite situées dans l'archipel des Lavezzi tout proche et de l'autre côté du détroit en Sardaigne. Ces carrières avaient l'avantage de se trouver à quelques heures de bateau d'Ostie, donc de Rome. Les chercheurs ont montré que les traces d'extraction romaines sur l'île de Cavallo sont d'ampleur ; une autre habitation romaine construite sur



© CReA-Parimoin

L'un des fronts de taille de la carrière romaine de Cavallo.

l'île aurait répondu aux besoins d'administration, tandis qu'une structure rectangulaire de 10 par 6 mètres serait les restes d'une cabane de carriers. L'enquête se poursuit. ■

FRANÇOIS SAVATIER

Communiqué de l'université libre de Bruxelles, 15 janvier 2020, <https://bit.ly/2RZ9RIz>