

R

ENDEZ-VOUS

P.72 Logique & calcul
P.78 Art & science
P.80 Idées de physique
P.84 Chroniques de l'évolution
P.89 Science & gastronomie
P.90 À picorer

QUAND LES MACHINES FONT DES MATHÉMATIQUES

Les intelligences artificielles seront-elles un jour capables de produire des théorèmes aussi intéressants que ceux des mathématiciens humains? On en est encore loin, mais les choses avancent peu à peu.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Il est évident que l'invention et la découverte, que ce soit en mathématiques ou ailleurs, se fait en combinant des idées. Or, il existe un très grand nombre de combinaisons possibles, dont la plupart sont sans intérêt, alors qu'au contraire très peu d'entre elles sont fructueuses. Lesquelles notre esprit, notre esprit conscient, perçoit-il? Celles qui sont fructueuses ou qui pourraient l'être.

Jacques Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Albert Blanchard, 1959.

Les ordinateurs aident les mathématiciens d'une multitude de manières: ils facilitent l'édition des textes et la communication entre chercheurs; ils font des calculs numériques et symboliques, en produisant par exemple des milliers de milliards de décimales de π ; grâce aux programmes «assistants de preuves», ils aident les mathématiciens à mettre au point les longues démonstrations et à les vérifier; parfois, les algorithmes de démonstration automatique découvrent des

preuves qu'aucun mathématicien n'avait trouvées (voir l'encadré 1).

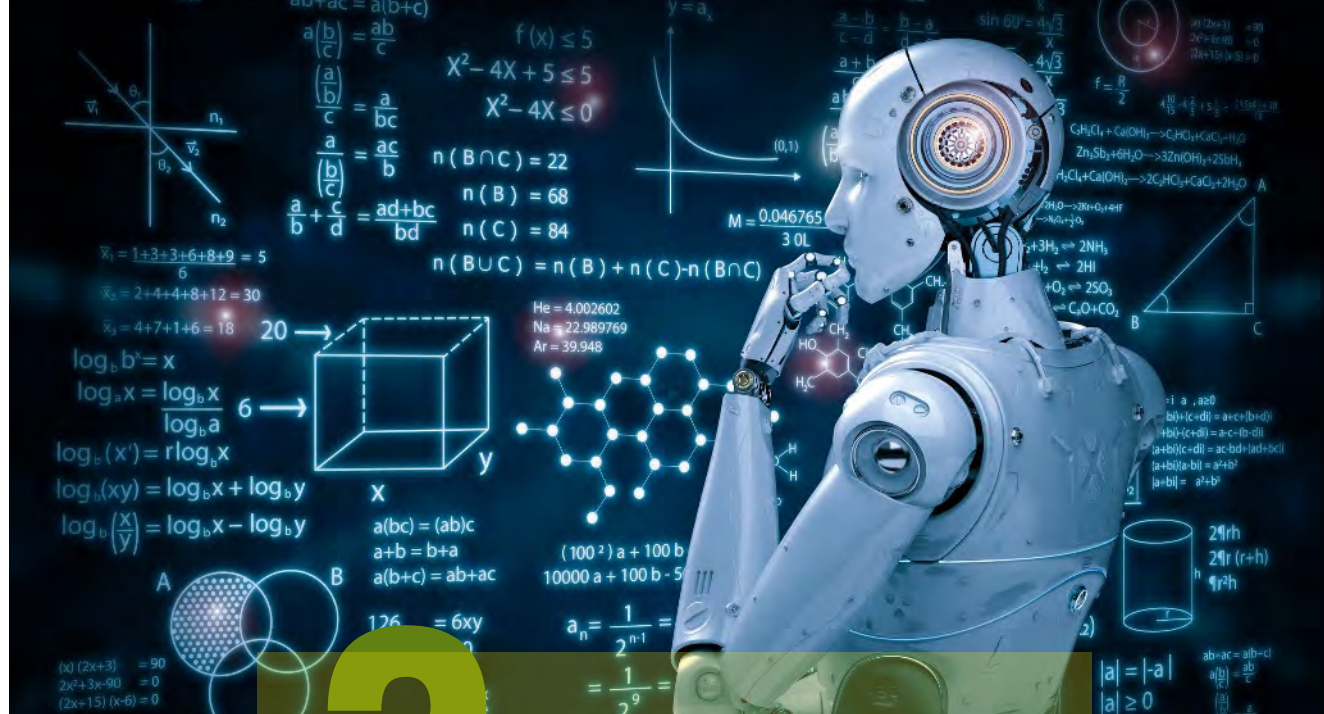
Cependant, à côté de cette aide exploitant la fiabilité et la rapidité des machines, est-ce que celles-ci peuvent se substituer aux chercheurs et faire avancer un domaine mathématique en y découvrant de nouvelles idées, de nouvelles formules, de nouvelles conjectures ou de nouveaux théorèmes intéressants?

On a précisé «intéressants», car on sait depuis longtemps produire mécaniquement des théorèmes en utilisant des programmes. À chaque système axiomatique, celui de l'arithmétique, celui de la théorie des ensembles, etc., est associé un algorithme qui en énumère les théorèmes. Malheureusement ces algorithmes d'énumération produisent des masses de résultats évidents et sans valeur.

L'intelligence, le savoir particulier et l'intuition d'un mathématicien lui font aborder un domaine avec finesse en repérant des énoncés particuliers, en général assez courts et difficiles à démontrer. Ces énoncés sont des jalons dans leurs travaux; ils leur évitent de se perdre dans

QUELS TYPES DE RECHERCHES?

1 L'intelligence artificielle en mathématiques a trois objectifs. (a) L'aide à la démonstration et à la rédaction détaillée et contrôlée de démonstrations compliquées. Dans ce domaine, des succès ont été obtenus, comme la mise au point	définitive de la démonstration de la conjecture de Kepler sur l'empilement le plus compact possible des sphères dans l'espace, démonstration due à Thomas Hales en 2014. (b) La démonstration automatique : l'ordinateur recherche seul une	démonstration. Quelques succès ont été obtenus. (c) La recherche et la suggestion d'idées, de conjectures et de théorèmes nouveaux et intéressants. C'est ce dernier aspect qui est principalement envisagé dans cet article.
---	---	---



FAIRE DES CONJECTURES INTÉRESSANTES

l'infini des vérités faciles et trop proches les unes des autres. L'intelligence artificielle peut-elle concevoir des méthodes qui égalent les mathématiciens dans le travail d'imagination et de construction ordonnée des théories mathématiques, qui ne sont pas des successions ennuyeuses de vérités triviales comme $1+1=2$, $1+2=3$, $1+3=4$, etc.?

Nous allons voir que la « recherche automatisée » progresse petit à petit : il se peut que, imperceptiblement, nous entrons dans une nouvelle ère.

PREMIÈRES TENTATIVES

Le logicien Hao Wang, un ami d'Einstein à Princeton, écrivit en 1959 un programme pour produire et sélectionner des théorèmes du calcul propositionnel, une partie de la logique où l'on traite de formules du type $(A \text{ et } B) \Rightarrow A$, $(A \text{ ou non-}A)$, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{non-}B \Rightarrow \text{non-}A)$. Cette tentative lui fit prendre conscience que le problème principal était de sélectionner les résultats « intéressants », mais le domaine trop étroit du calcul propositionnel fit qu'aucun résultat spectaculaire ne sortit de cette première tentative.

En juillet 1976, Douglas Lenat soutint à Stanford un mémoire de doctorat dont le sujet était son « mathématicien automatique », le programme AM (pour Automated Mathematician). Il y décrivait un programme en langage LISP, qui, à partir de règles et de manipulations symboliques, déduit et accumule des concepts et des propriétés de ces concepts. Douglas Lenat explique que son programme a découvert la notion de nombre premier, a énoncé le théorème de décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Il aurait aussi redécouvert la fameuse conjecture

Pour concevoir des systèmes menant une recherche mathématique, il faut faire en sorte que ces systèmes effectuent des tris. Un tel système ne doit retenir que les propriétés et conjectures les plus intéressantes. Le Britannique Simon Colton, qui a développé le système HR (voir le texte principal), propose six critères pour repérer les conjectures intéressantes.

1) Les conjectures doivent être plausibles. Il faut éliminer celles qui sont fausses parce qu'il existe des exemples simples qui les contredisent.

2) Les conjectures doivent être nouvelles. Le système doit disposer des résultats connus sur le sujet étudié et savoir les exploiter pour ne pas proposer les conséquences immédiates de résultats connus.

3) Les résultats envisagés doivent être étonnants. John Conway pense qu'un résultat est d'autant plus intéressant qu'il est « scandaleux » (outrageous). Il est délicat de concevoir des programmes sachant définir ce qui est « étonnant ». Le plus souvent, on se contente d'éliminer les énoncés qui sont des conséquences immédiates d'énoncés connus ou qui sont des cas particuliers de formules logiques toujours vraies, comme $\text{non}(\text{non-}A) \Leftrightarrow A$. Une propriété simple qui exige une longue démonstration est étonnante puisqu'on ne peut pas comprendre aisément ce qui la rend vraie. Malheureusement, la notion : « exige une longue

démonstration » est impossible à programmer en pratique, car, pour l'affirmer d'un énoncé, il faudrait explorer tous les chemins de démonstrations possibles pouvant y conduire.

4) Les conjectures doivent concerner de nombreux cas. Si l'on s'intéresse à des propriétés P_1 et P_2 , la conjecture $P_1 \Rightarrow P_2$ n'est intéressante que si une grande proportion des objets jouit de la propriété P_1 .

5) Les conjectures doivent être facilement compréhensibles et donc doivent avoir des énoncés assez courts et si possible ne faire intervenir que les concepts de base de la théorie étudiée.

6) Les conjectures doivent être fécondes et par exemple avoir beaucoup de conséquences simples. En mathématiques, il est difficile d'anticiper cette qualité d'une conjecture. Le grand théorème de Fermat n'est considéré comme fécond que parce qu'il a résisté pendant des siècles. Si Fermat l'avait démontré en quelques lignes, personne n'aurait estimé l'énoncé de ce théorème comme intéressant.

Sur ce sujet, voir : S. Colton et al., « On the notion of interestingness in automated mathematical discovery », *International Journal of Human-Computer Studies*, vol. 53(3), pp. 351-375, 2000.